

# Índice

---

<b>1</b>	<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>11</b>
1.1	MARCO DE LA TESIS .....	11
1.1.1	ALCANCE DE LA TESIS .....	12
1.2	OBJETIVOS .....	13
1.3	ESTRUCTURA DE LA TESIS.....	14
<b>2</b>	<b>PROBLEMÁTICA DE LA INSPECCIÓN VISUAL AUTOMATIZADA.....</b>	<b>17</b>
2.1	LA INSPECCIÓN INDUSTRIAL.....	18
2.1.1	TAXONOMÍA DE LOS PROBLEMAS DE INSPECCIÓN .....	19
2.2	INSPECCIÓN VISUAL AUTOMATIZADA .....	20
2.2.1	VENTAJAS DE LA INSPECCIÓN AUTOMATIZADA VISUAL .....	21
2.2.2	LIMITACIONES DE LOS SIVA.....	23
2.2.3	CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE INSPECCIÓN VISUAL AUTOMATIZADA .....	24
2.2.4	IMPLEMENTACIÓN DE SIVA.....	26
2.2.5	LITERATURA DE LOS SIVA .....	27
2.3	CONCLUSIONES .....	28

<b>3 FORMACIÓN DE IMÁGENES EN SISTEMAS DE INSPECCIÓN VISUAL AUTOMATIZADA (SIVA).....</b>	<b>29</b>
<b>3.1 CARACTERIZACIÓN DE IMÁGENES DIGITALES .....</b>	<b>31</b>
3.1.1 DEFORMACIONES DE LAS IMÁGENES .....	33
<b>3.2 REALCE VISUAL DE SUPERFICIES PLANAS.....</b>	<b>37</b>
3.2.1 MECANISMOS DE REFLEXIÓN DE LA LUZ SOBRE SUPERFICIES PLANAS.....	38
3.2.2 MODELO DE LA CÁMARA.....	52
<b>3.3 MODELOS DE FUENTES LUMINOSAS E ILUMINACIÓN UNIFORME EN SUPERFICIES PLANAS .....</b>	<b>54</b>
<b>3.4 SISTEMA DE ILUMINACIÓN PARA LOS SIVA IMPLEMENTADOS.....</b>	<b>58</b>
3.4.1 METODOLOGÍA A EMPLEAR PARA EL DISEÑO DEL SISTEMA DE ILUMINACIÓN.....	58
3.5.1 SISTEMA DE ILUMINACIÓN PARA LA INSPECCIÓN DEL PAPEL .....	60
<b>3.5 ARQUITECTURA DE CÁMARAS CCD EN SIVA .....</b>	<b>72</b>
3.5.1 FACTORES A CONSIDERAR EN LA ELECCIÓN DE LAS CÁMARAS .....	72
3.5.2 CÓMO ELEGIR LA CÁMARA.....	78
3.5.3 EJEMPLOS DE FORMACIÓN DE IMÁGENES EN ESCENAS SIVA .....	84
<b>3.6 CONCLUSIONES .....</b>	<b>85</b>
 <b>4 DETECCIÓN VISUAL DE DEFECTOS LOCALES .....</b>	 <b>87</b>
<b>4.1 LA DETECCIÓN COMO UN PROCESO DE DECISIÓN.....</b>	<b>89</b>
<b>4.2 REALCE DE LOS DEFECTOS LOCALES.....</b>	<b>92</b>
4.2.1 FILTROS LINEALES DISCRETOS .....	93
4.2.2 CONVOLUCIÓN Y CORRELACIÓN ESPACIAL.....	100
4.2.3 MODELO DE REGRESIÓN CON VARIABLES CUALITATIVAS .....	102
4.2.4 FILTROS NO LINEALES: PROCESAMIENTO MORFOLÓGICO .....	106
<b>4.3 ETAPA DE DECISIÓN.....</b>	<b>117</b>
4.3.1 MODELIZACIÓN DEL PROBLEMA MEDIANTE LAS FUNCIONES DE DENSIDAD.....	117
4.3.2 ESTRATEGIAS DE DECISIÓN .....	119
4.3.3 IMPLEMENTACIÓN DE LA DECISIÓN: SEGMENTACIÓN DE IMÁGENES.....	124
4.3.4 UMBRALIZACIÓN PARA LA DETECCIÓN DE DEFECTOS .....	125
<b>4.4 AGRUPACIÓN DE PÍXELES BINARIZADOS.....</b>	<b>130</b>
4.4.1 ELIMINACIÓN DE FALSAS ALARMAS .....	130
4.4.2 RECONSTRUCCIÓN DEL DEFECTO .....	131
<b>4.5 MEDIDA DE CALIDAD DE UN PROCEDIMIENTO PARA LA DETECCIÓN DE DEFECTOS LOCALE.....</b>	<b>132</b>
4.5.1 MEDIDAS BASADAS EN EL ERROR DE BAYES .....	132
4.5.2 MEDIDAS BASADAS EN LAS FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN .....	133
<b>4.6 DISEÑO DEL SISTEMA DE DETECCIÓN DE DEFECTOS LOCALES EN LA PASTA DE PAPEL.....</b>	<b>135</b>

4.6.1 REALCE DE LOS DEFECTOS LOCALES EN LA PASTA DE PAPEL .....	136
4.6.2 VALIDACIÓN DE LAS HIPÓTESIS DE NORMALIDAD .....	139
4.6.3 PARÁMETROS DEL SISTEMA DE DETECCIÓN DE DEFECTOS .....	141
<b>4.7 CONCLUSIONES .....</b>	<b>145</b>
 <b>5 ANÁLISIS DE LOS DATOS.....</b>	 <b>147</b>
<b>5.1 ANÁLISIS DE LOS DATOS CON MAPAS AUTO ORGANIZADOS .....</b>	<b>149</b>
5.1.1 MAPAS AUTO ORGANIZADOS .....	150
5.1.2 CONCLUSIONES SOBRE LOS MAPAS AUTO ORGANIZADOS.....	161
<b>5.2 SOM COMO HERRAMIENTA DE CLUSTERING .....</b>	<b>162</b>
5.2.1 DEFICIENCIAS DE LOS MAPAS DE KOHONEN EN EL PROCESO DE <i>CLUSTERING</i> .....	163
5.2.2 MÉTODO U-MATRIZ.....	164
<b>5.3 REFINAMIENTO DE LA TÉCNICA DE CLUSTERING.....</b>	<b>166</b>
5.3.1 DISTRIBUCIONES MULTINORMALES .....	169
5.3.2 TRANSFORMACIONES NORMALIZANTES .....	176
5.3.3 LA ESTIMACIÓN DE MV DE LAS TRANSFORMACIONES BOX COX.....	177
5.3.4 CAMBIOS DE ESCALA DE LA POBLACIÓN.....	179
5.3.5 DETERMINACIÓN DE $\hat{\Lambda}$ .....	180
5.3.6 INTERVALOS DE CONFIANZA Y PRUEBA DE NORMALIDAD.....	181
<b>5.4 AGRUPACIÓN DE DATOS EN LOS DEFECTOS DE PLANCHAS DE ALUMINIO .....</b>	<b>183</b>
5.4.1 EXTRACCIÓN DEL VECTOR DE CARACTERÍSTICAS .....	184
5.4.2 ANÁLISIS DE LOS DATOS .....	187
5.4.3 APLICACIÓN DE LAS U-MATRIZ AL ANÁLISIS DE LOS DEFECTOS DEL ALUMINIO .....	189
5.4.4 ELIMINACIÓN DE COMPONENTES SIN INFORMACIÓN ESTADÍSTICA.....	194
5.4.5 BÚSQUEDA DE ESPACIO NORMALES .....	195
<b>5.5 CONCLUSIONES .....</b>	<b>197</b>
 <b>6 CLASIFICADORES ESTÁTICOS .....</b>	 <b>199</b>
<b>6.1 CLASIFICADORES PARAMÉTRICOS .....</b>	<b>200</b>
6.1.1 CLASIFICACIÓN A DOS GRUPOS .....	203
6.1.2 EXPRESIÓN GENERAL DEL ERROR PARA LA CLASIFICACIÓN DE DOS GRUPOS.....	204
6.1.3 DISEÑO DE CLASIFICADORES LINEALES ÓPTIMOS.....	215
6.1.4 DISEÑO DE CLASIFICADORES CUADRÁTICOS.....	220
<b>6.2 ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS MEDIANTE UN CONJUNTO FINITO DE MUESTRAS .....</b>	<b>223</b>
6.2.2 EFECTO DEL NÚMERO DE MUESTRAS EN EL DISEÑO DE CLASIFICADORES PARAMÉTRICO.....	229
<b>6.3 MÉTODO DE PARAMETRIZACIÓN DE LOS CLUSTER DOS A DOS .....</b>	<b>240</b>

6.3.1 REDUCCIÓN DE LA DIMENSIÓN: SELECCIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS.....	240
6.3.2 CLUSTERING PARAMÉTRICO.....	243
<b>6.4 CLASIFICADORES NO PARAMÉTRICOS: MÉTODO DE APRENDIZAJE SUPERVISADO</b>	
<b>LVQ.....</b>	<b>246</b>
6.4.1 INTRODUCCIÓN .....	246
6.4.2 ALGORITMO LVQ .....	247
6.4.3 MODIFICACIONES REALIZADAS EN EL ALGORITMO LVQ1 .....	253
<b>6.5 APLICACIÓN A LA CLASIFICACIÓN DE DEFECTOS LOCALES EN PLANCHAS DE ALUMINIO COLADO.....</b>	<b>256</b>
6.5.1 PARAMETRIZACIÓN DOS A DOS DE LOS <i>CLUSTER</i> SEGÚN MÉTODO PRESENTADO .....	256
6.5.2 DISEÑO DE LOS CLASIFICADORES PARAMÉTRICOS.....	258
6.5.3 MODIFICACIÓN DEL ALGORITMO NO PARAMÉTRICO OLVQ.....	262
6.5.4 COMPARACIÓN CON OTRAS TÉCNICAS TRADICIONALES DE CLASIFICACIÓN .....	264
<b>6.6 CONCLUSIONES.....</b>	<b>265</b>
<b><u>7 APLICACIONES INDUSTRIALES DE LA TESIS.....</u></b>	<b><u>267</u></b>
<b>7.1 INSPECCIÓN VISUAL DEL ALUMINIO COLADO.....</b>	<b>267</b>
7.1.1 PROCESO DE OBTENCIÓN DEL ALUMINIO COLADO.....	268
7.1.2 SIVA APLICADO A LAS PLANCHAS DE ALUMINIO COLADO.....	270
<b>7.2 INSPECCIÓN VISUAL DE LA PASTA DE PAPEL.....</b>	<b>276</b>
7.2.1 PROCESO DE OBTENCIÓN DE LA PASTA DE PAPEL .....	276
7.2.2 INSPECCIÓN DE LA PASTA DE PAPEL.....	276
7.2.3 SIVA IMPLEMENTANDO PARA LA LIMPIEZA DE LA PASTA DE PAPEL.....	278
7.2.4 RESULTADOS.....	282
<b>7.3 CONCLUSIONES .....</b>	<b>283</b>
<b><u>8 CONCLUSIONES.....</u></b>	<b><u>285</u></b>
<b>8.1 APORTACIONES DE LA TESIS .....</b>	<b>288</b>
<b>8.2 FUTUROS TRABAJOS .....</b>	<b>289</b>

<b><u>BIBLIOGRAFÍA.....</u></b>	<b><u>291</u></b>
<b><u>ÍNDICE DE FIGIRAS.....</u></b>	<b><u>303</u></b>
<b><u>ÍNDICE DE TABLAS.....</u></b>	<b><u>309</u></b>
<b><u>DATOS BIOGRÁFICOS .....</u></b>	<b><u>311</u></b>

# 1

## Introducción

---

### 1.1 Marco de la tesis

---

La tesis presente se enmarca en el ámbito científico de la Inspección automatizada, con el empleo de técnicas de Visión artificial e Inteligencia artificial.

El control de calidad es uno de los aspectos más importantes en la competitividad industrial. El alto coste de la inspección humana ha hecho promover y desarrollar sistemas capaces de resolver las tareas de forma automática. Una de las mayores dificultades dentro de la Inspección es la supervisión de la apariencia visual. Ésta es encargada, en la mayoría de las ocasiones, a inspectores humanos. El sistema de visión humano es adecuado para su funcionamiento en un mundo de variedad y cambio, mientras que el proceso de inspección visual industrial, requiere de la observación de una escena repetida de forma que se puedan detectar anomalías. La exactitud del sistema humano de visión empeora con el trabajo repetitivo y monótono. El resultado es una inspección lenta, cara y errática. La inspección visual automatizada es, obviamente, la alternativa a los inspectores humanos, liberándolos de tan alienante trabajo.

De entre los posibles escenarios de los Sistemas de Inspección Visual Automatizada, SIVA, esta tesis se ha centrado en la inspección visual de superficies planas y homogéneas. Las razones de estas restricciones vienen dadas por las complejidades de diseño de estos sistemas en términos generales. No obstante, esta acotación del problema resulta válida en el

desarrollo de muchas aplicaciones SIVA para las necesidades de la industria actual. De hecho, a lo largo de los últimos años se han desarrollado múltiples arquitecturas para la detección de defectos visuales en superficies planas y homogéneas, tales como textiles, maderas, aceros, aluminio, plásticos, pasta de papel y un sinnúmero de productos industriales, mostrando un gran interés tanto para la industria como para la investigación aplicada.

Si bien hay constatación de múltiples sistemas de inspección de superficies [Piir90][Oulu97][Parsy97][EES92], en ningún caso existe una metodología completa que permita, independientemente de las características del proceso, configurar el sistema de inspección visual automatizado [Newma95]. Los trabajos presentados muestran soluciones particulares atendiendo a las condiciones de la inspección. Aún así, de todos ellos se desprende una filosofía común, caracterizada por tres bloques. Una primera etapa encargada de la formación de imágenes, con los objetivos de realzar los defectos visuales en la escena y trasladarlos a la memoria del computador. Un segundo bloque llamado sistema de detección de defectos, que trata de localizar los defectos de apariencia visual. Y por último, un tercer bloque de clasificación, convirtiendo la información seleccionada en una etiqueta de catalogación. A veces resulta este último bloque como optativo.

El desarrollo de esta tesis pretende ofrecer una solución metódica al diseño de sistemas de inspección visual automatizada de superficies planas y homogéneas. La consecución de este objetivo debe cubrir los fundamentos y criterios para el diseño del sistema de iluminación sobre superficies planas, estrategias de arquitectura de adquisición de escenarios SIVA, la elaboración de algoritmos de detección de defectos locales, la representación virtual de los defectos junto con la selección de las mejores características y por último, la clasificación de los defectos.

Como marco del desarrollo experimental de la tesis, así como de aplicación industrial, se ha participado en la implementación de dos sistemas de inspección. Un primer SIVA dedicado a la detección y clasificación de faltas visuales en el aluminio colado, capaz de discernir la ausencia/presencia de defectos locales en las planchas de aluminio, así como de su clasificación. Y un segundo sistema diseñado para la detección de defectos locales en la pasta de papel. Las arquitecturas desarrolladas han servido de bancada para probar la bondad de las propuestas presentadas en esta tesis.

### **1.1.1 Alcance de la tesis**

La determinación en superficies planas y homogéneas de la presencia o ausencia de defectos, así como de su clasificación, mediante técnicas de Visión artificial e Inteligencia artificial ha sido tema de estudio por múltiples autores. Todos coinciden básicamente en el planteamiento de tres hitos importantes: formación de imágenes, algoritmos de detección y en menor medida la clasificación de los defectos.

El primer hito cubre desde la iluminación hasta el almacenamiento de la señal en la memoria del computador. En referencia al sistema de iluminación, la problemática se centra en la colocación óptima entre los focos luminosos, la superficie a inspeccionar y las disposiciones de los sensores. Con tal propósito, se requieren conocer los modelos sobre la

reflexión de la luz en superficies planas [Nayar91], los comportamientos de los focos luminosos [Genn94] y las actuaciones de los sensores [Holst96]. De esta forma se podrá determinar la colocación geométrica de los focos y las cámaras respecto de las superficies a revisar. No hay que olvidar que el propósito de este bloque es aumentar todo lo posible el realce en la escena. En cuanto a la instrumentación asociada a la adquisición de imágenes, depende fundamentalmente de la velocidad de desplazamiento de la superficie y del tamaño de los defectos. Es el proceso industrial el que va a definir qué tipo de tecnologías de cámaras se necesitan, cuáles deben ser sus resoluciones y el número de sensores que son imprescindible para la inspección.

En cuanto a las técnicas empleadas para la detección de defectos, éstas se han centrado en el procesamiento y segmentación de las imágenes recibidas [Norton82][Brads94][Macai93], con el objeto, primero, de aumentar el realce entre defecto y fondo, y segundo, segmentar las imágenes para la localización de los defectos locales. Para el realce de los defectos se han utilizado tanto filtros lineales como no lineales, mientras las técnicas de segmentación empleadas se basan en las propiedades de los histogramas.

Menos explotado y extendido es el estudio de la clasificación de los defectos detectados. En parte porque las exigencias industriales no lo precisan, o bien porque son sencillos clasificadores basados en alguna propiedad directa de los objetos defectuosos detectados. Sin embargo, a veces se necesita la catalogación de faltas complejas. Estos clasificadores presentan algunas peculiaridades. Suele suceder que algunos tipos de defectos tienen frecuencias bajas de aparición, por lo que no se tienen muestras o el número de ellas es poco representativo. Además, también ocurre que el precio de tener un universo del problema sea económicamente costoso, por lo que las poblaciones que se parten para el diseño de estos clasificadores suelen ser escasas.

En esta tesis se abordan estos tres hitos, intentando dar soluciones y caminos que ofrezcan métodos rigurosos de análisis, para que en una fase posterior se pase al diseño de cada uno de estos sistemas. Los próximos capítulos exponen de forma ordenada el planteamiento del problema en concreto, su análisis, las técnicas a emplear y por último se muestra el trabajo experimental desarrollado.

## 1.2 Objetivos

---

El objetivo general de esta tesis es el desarrollo de técnicas de Visión e Inteligencia artificial conducentes tanto a la caracterización de defectos en superficies planas y homogéneas, como a la detección y clasificaciones de tales defectos, de forma que la información obtenida sea integrable en tiempo real dentro del proceso productivo. Con tal fin, los objetivos desglosados en puntos corresponderán a:

- Proposición de una arquitectura general para el sistema de inspección automatizada de superficies planas y homogéneas.



- Estudio de la problemática de iluminación sobre superficies planas. Diseño del sistema de iluminación, constituido por las fuentes luminosas y los sensores. Localización de los elementos de iluminación y adquisición junto con las tecnologías a emplear.
- Estudio sobre la adquisición de señales de vídeo, su resolución y exactitudes de las medidas tomadas. Planteamiento de una solución que permita explorar el 100% de la superficie analizada sin que ésta se detenga ante el dispositivo de captación y que no intervenga en el proceso productivo.
- Desarrollo de algoritmos de realce de defectos locales basados en el diseño de filtros lineales y no lineales.
- Métodos de segmentación para la detección de defectos locales basados en el análisis del histograma.
- Desarrollo de medidas de calibración sobre las distintas técnicas empleadas para la detección de los defectos.
- Estudio y desarrollo de técnicas de modelización de los defectos, consistencia de la representación virtual y extracción y selección de las mejores características.
- Análisis exploratorio de los datos para la decantación de las distintas subclases de defectos.
- Desarrollo de la metodología para el reconocimiento de defectos haciendo uso de técnicas estadísticas y cognitivas.

### 1.3 Estructura de la tesis

---

La configuración de la tesis en capítulos viene dada como sigue: un capítulo inicial sobre la problemática concerniente a la inspección visual automatizada, para pasar a desarrollar en los siguientes cuatro capítulos el análisis y diseños de las cuestiones planteadas, esto es, formación de imágenes, detección de los defectos locales, análisis de los datos y clasificación de los defectos. Para acabar se muestran las aplicaciones industriales elaboradas, las cuales han servido como marco de trabajo experimental. Una explicación más detallada de los siguientes capítulos se muestra a continuación con el objeto de ilustrar por separado qué problemática se estudia en cada tema.

El capítulo segundo presenta la problemática de la Inspección visual automatizada. Se empieza con una evolución histórica de la Inspección industrial llegando a la conclusión de la necesidad de insertar las operaciones de inspección dentro del proceso manufacturero. Además, también se concluye que la inspección visual automatizada es ideal para la mejora de la producción y de la competitividad de las empresas. Llegado a este punto, se centra la problemática sobre los SIVA, indicando sus ventajas e inconvenientes. Luego se pasa a un

análisis de los SIVA mediante la clasificación de éstos atendiendo al tipo de información a tratar, a las técnicas empleadas y a la geometría de las superficies a inspeccionar. La exposición concluye con referencias a SIVA implementados y a la literatura especializada.

El estudio sobre la formación de imágenes en SIVA será desarrollado en el tercer capítulo. El primer problema a resolver trata sobre la ubicación óptima de los focos luminosos y sensores respecto a la superficie a inspeccionar, por lo que se hace necesario el estudio sobre el comportamiento de la luz en superficies planas, así como el desarrollo de modelos sobre las fuentes luminosas y los captadores. A partir de éstos se ha intentado o bien una iluminación uniforme sobre la superficie a inspeccionar, o bien se ha buscado qué componentes de la luz reflejada tienen mayor nivel de información. Se ha trabajado sobre una metodología basada en las expresiones analíticas de las fuentes luminosas y en sus desarrollos de Taylor, de manera que determine la ubicación correcta de los focos y elementos complementarios para una iluminación uniforme sobre la escena. También se ha trabajado sobre el comportamiento de la luz en superficies lisas para la óptima localización de foco-sensor. Presentándose una de las aportaciones de la tesis, en referencia a la metodología empleada para el diseño del sistema de iluminación y su ubicación. El segundo problema se refiere a la tecnología de los sensores y a la arquitectura empleada. Se hace un planteamiento sobre los factores a considerar en la elección de las cámaras de vídeo. Por último, se dan referencias bibliográficas de cómo ha sido resuelto el problema de formación de imágenes en SIVA documentados.

A partir del cuarto capítulo, se pretende mostrar una metodología sobre la detección de defectos locales en superficies planas y homogéneas. El planteamiento pivota en tres bloques: realce, detección y eliminación de falsas alarmas. Sobre el realce de los defectos se plantea el diseño de filtros lineales y no lineales, ofreciendo un método para la determinación de la máscara de convolución lineal, presentándose como novedoso. En cuanto a la detección, ésta se basa en las funciones de densidad del fondo y del defecto, desarrollando técnicas de segmentación basadas en el análisis del histograma. Respecto a la eliminación de falsas alarmas, se proponen técnicas de procesamiento morfológico con el objetivo de mejorar los resultados de la detección. El capítulo acaba mostrando un procedimiento que permita calibrar cuál de las técnicas propuestas para la detección da el mejor resultado, siendo ésta otra de las aportaciones de esta tesis.

Una vez detectados los defectos locales en la superficie y determinada la conversión de la imagen segmentada en un vector de características, se pasan las faltas a la etapa de clasificación. Los dos siguientes capítulos tienen como objetivo, dar una metodología de actuación para la catalogación de las muestras. La idea básica es integrar tanto las técnicas estadísticas como las técnicas cognitivas en la resolución del problema. El quinto capítulo trata del análisis exploratorio de los datos, etapa encargada de la búsqueda de los grupos inherentes del universo del problema. Se han utilizado como base los mapas auto organizados. Sin embargo, muestran algunas limitaciones, que son analizadas para pasar a renglón seguido a proponer una nueva metodología. El fundamento del método propuesto se sustenta en la parametrización de los grupos mediante funciones de densidad.

En general, en un SIVA se trata de clasificar las formas de los defectos locales, ofreciéndose éstos como patrones de tipo estático. Otra de las peculiaridades de estos sistemas

es la falta de muestras para el diseño de los clasificadores. El sexto capítulo aborda el diseño de los clasificadores paramétricos y no paramétricos, sujetos a las mencionadas condiciones, indicándose expresiones analíticas tanto del error de clasificación como su sesgo, siendo unas de las aportaciones más significativas de la tesis. También, es presentado un novedoso método de parametrización-selección de las características basadas en transformaciones Box Cox y en las distancias de Bhattacharyya. Por último se comparan los resultados obtenidos con las técnicas de Reconocimiento de formas tradicionales.

El capítulo 7 describe las aplicaciones industriales acometidas durante la realización de esta tesis. Se presenta tanto el SIVA elaborado para el aluminio colado como para la pasta de papel. El esquema empleado trata de exponer la problemática a resolver y cómo se ha diseñado la formación de imágenes, la detección de los defectos y su clasificación para cada uno de éstos.

Por último, en el capítulo octavo se hace un resumen del trabajo realizado así como de las aportaciones novedosas presentadas. Para acabar indicando algunas posibles líneas de trabajo a investigar en el futuro.

# 2

## Problemática de la Inspección visual automatizada

---

En este capítulo se presenta la problemática de la Inspección visual automatizada. Se empieza con una evolución histórica de la Inspección industrial, recalcando la necesidad de insertar las operaciones de inspección dentro del proceso de producción (2.1). De esta idea y dentro de las diferentes técnicas que pueden ser empleadas, la automatización de las operaciones de inspección visual resulta de las que mejor encaja, presentándose en muchos casos ser vital en la mejora del proceso productivo y en su competitividad (2.1.1). Llegado a este punto, se centra la problemática en la Inspección visual automatizada (2.2). Son presentadas las ventajas e inconvenientes de los SIVA (2.2.1 y 2.2.2). Seguidamente se pasa a la clasificación de los SIVA atendiendo a la geometría de las superficie (2.2.3.1), al tipo de información recogida (2.2.3.2) y a las técnicas empleadas(2.2.3.3). Estas dicotomías permiten establecer el marco de trabajo dentro de la filosofía SIVA. Las referencias a SIVA implementados enseñan algunas de las soluciones tomadas(2.2.4). Por último, una guía sobre literatura SIVA muestra la cantidad de libros, artículos y ponencias, indicando la efervescencia de un campo de investigación en alza (2.2.5).

## 2.1 La Inspección industrial

---

La inspección fue uno de los motores de la Revolución industrial, al ayudar a la realización de productos con dimensiones consistentes. Con partes estándar, la noción de intercambiabilidad fomentada por Whitney fue finalmente una realidad. La producción en serie era posible y las organizaciones tendieron a ser más complejas. A principios de siglo, con el aumento de la complejidad se vio la necesidad de separar y formar departamentos de inspección. Durante las tres cuartas partes del siglo, el número de inspectores se ha incrementado paulatinamente, asegurándose éstos la responsabilidad de la calidad de los productos. Los inspectores han actuado cuando detectaban alguna anomalía en el proceso. Pero frecuentemente, esta actitud significaba que mientras se localizaba la mala calidad del producto, algunos productos ya habían sido embarcados y recibidos por el cliente.

Durante la mayor parte del siglo XX, la organización de la inspección estaba normalmente separada del proceso productivo. La responsabilidad de la inspección de los productos dependía del departamento de calidad. Sin embargo, la constatación de que la calidad del producto no podía darse desde fuera, sino en su propio proceso, supuso un punto de inflexión en la Inspección industrial.

En una industria cada vez más automatizada, donde el diseño de los productos puede ser modificado, las operaciones del proceso cambian de secuencia con sólo variar las órdenes en un programa. Es este ambiente el que propicia que las operaciones de inspección no estén aisladas del proceso, al contrario, deben formar parte de éste. Aun más, la mejora de la producción manufacturera va a depender de la integración de sistemas de inspección dentro del proceso [Winch96].

En el proceso productivo, el resultado es un producto cuyas propiedades varían dentro de un rango. Las causas de esta variabilidad son debidas, a las propiedades estocásticas del control del proceso, la falta de uniformidad de las materias primas, las variaciones ambientales, como temperatura, humedad, vibraciones, y por supuesto los errores humanos. La variabilidad del proceso productivo es una de sus características. Luego, la inspección se encuentra dentro de un mundo variable, en el cual va a tratar de identificar la extensión de la variabilidad. Por estas razones, es frecuente representar las medidas mediante distribuciones normales. Algo muy utilizado y que en esta tesis también se va a aplicar.

Dependiendo de la variabilidad un proceso podría producir productos aceptables, rechazables o bien provocar el reajuste del propio proceso. Este conocimiento es crítico en cualquier proceso y continuará siendo crítico en el futuro.

En términos simples, la inspección puede ser vista como el examen de alguna característica del producto, la cual trata de determinar si se encuentra dentro de los valores esperados. Para su determinación debe considerarse el emplazamiento, los métodos, los instrumentos y si hay necesidad de realizar historiales.

### 2.1.1 Taxonomía de los problemas de inspección

Una primera ayuda para adentrarse en la inspección, es realizar una catalogación de atributos alrededor de ésta: dónde se hace el control de calidad, qué parte de la producción es considerada, qué medidas se realizan o qué tipo de tecnología se emplea. A continuación se exponen los conceptos básicos de la problemática de la inspección

Una primera clasificación se establece en la ubicación del control de calidad. Las inspecciones pueden empezar en la recepción de las materias primas, continuar en puntos del proceso, y concluir en el empaquetado y embarque. El control de recepción se aplica a las partidas de nuevos productos, sean éstas materias primas, productos semiacabados o acabados, las cuales se inspeccionan para verificar las especificaciones establecidas. El control en curso de fabricación se realiza continuamente durante la fabricación del producto, a intervalos de tiempos fijos, y tiene por objeto vigilar el funcionamiento del sistema en las mejores condiciones posibles y recoger información para mejorarlo. El control de fabricación produce, a la larga, los mayores beneficios. Además de las funciones de inspección, que comparte con el control de recepción, permite aprender sobre las causas de variabilidad del proceso, aportando datos para mejorarlo. Por esta razón, el control de fabricación es una herramienta imprescindible para la evaluación de acciones encaminadas a prevenir fallos, y a perfeccionar el proceso productivo. Las inspecciones en la salida van dirigidas a aceptar o rechazar el producto. Es frecuente utilizar secuencias estadísticas sobre la producción final, con el objetivo de descubrir tendencias de desajuste del proceso.

Una segunda división se encuentra en el tipo de medida a realizarse. Pueden tomarse medidas sobre una característica de calidad medible (longitud, masa, contenido de impurezas, etc.), o sobre atributos o características cualitativas que el producto posee o no posee (control pasa/no pasa, por piezas defectuosas). El control por características medibles o por variables es más informativo que por atributos, ya que indica no sólo si un elemento es o no defectuoso, sino, además, la magnitud del defecto. No es lo mismo que un elemento tenga una longitud fuera de tolerancia por micras que por centímetros. En consecuencia, es mucho más eficaz para identificar las causas de los problemas de calidad mediante variables cuantitativas. Lo que justifica que se utilice especialmente en el control de procesos. Cuando el objetivo del control no es establecer acciones preventivas, sino únicamente verificar las especificaciones (como ocurre en el control de recepción), el control por atributos es el más adecuado. Por ser más rápido y simple de aplicar y, por tanto, más económico.

Una tercera dicotomía está en los métodos a emplear. Estas operaciones pueden ser realizadas por operadores o automáticamente. Ambas deben ser consideradas para la mejora de la calidad del producto. La capacidad de razonamiento del humano es un elemento muy importante en estas operaciones, su habilidad y flexibilidad no puede ser comparada con ninguna máquina. Sin embargo, los aspectos de fatiga y cansancio, hacen mella en el operario, tomando a veces actitudes subjetivas. En cambio la automatización de la inspección, permite dar un juicio invariable en el tiempo, aunque este juicio no sea tan rico en matices como el del humano.

Esta tesis, como fue comentado en el anterior capítulo, se enmarca dentro de la Inspección visual automatizada, por lo que se procede al estudio de su problemática.

## 2.2 Inspección Visual Automatizada

---

La inspección visual de objetos forma parte del proceso de fabricación. La automatización de esta tarea está siendo realizada de manera lenta, si se compara con otros eslabones de la cadena de producción, como transporte de materias primas o más recientemente la mecanización y ensamblaje de productos. La razón de esta languidez hay que buscarla en su enorme dificultad. Su complejidad viene originada, por la cantidad de capacidad de razonamiento que es necesaria implementar, ya sea para aceptar/rechazar un producto o clasificarlo según un tipo de defecto. La complicación del problema es tan elevada, que excepto unos pocos sistemas experimentales [Marsh90], el diseño se orienta a la inspección de una tarea altamente especificada. La construcción de un Sistema de Inspección Visual Automatizada, SIVA, y en inglés conocido como '*Automated Visual Inspection*', AVI, requiere de la intervención de múltiples disciplinas, tales como la Automática, la Visión e Inteligencia artificial o la Mecánica. Aún siendo de una gran complejidad, con unos costes elevados, aunque decrecientes, y enmarcado en un contexto internacional de economías abiertas, la automatización de las tareas de inspección visual se convierte en exigencia en sectores productivos con altos niveles de competencia.

En los últimos años, ha habido un aumento de atención por parte de la comunidad científica y técnica en el desarrollo de los SIVA, primero por lo apuntado anteriormente, una necesidad industrial con creciente prioridad. En segundo lugar, porque ha lanzado a la comunidad un conjunto de retos asociados a la Visión artificial y al Reconocimiento de Formas. Y por último, el aumento de capacidad de trabajo de las computadoras, así como de soporte físico especializado, ha roto las fronteras de imposibilidad de operatividad en línea, junto con un abaratamiento de los costes. Todo ello ha impulsado, a una efervescencia en torno a los SIVA, que queda reflejado por el aumento de sistemas instalados, así como por la proliferación de literatura especializada y de congresos monotemáticos.

Si bien cabe decir que no es una acepción universal, dentro de la nomenclatura SIVA hay que distinguir los conceptos de inspección, test y reconocimiento. Inspeccionar es el proceso de determinación de si un objeto se desvía de un conjunto de especificaciones. Generalmente, la inspección visual implica medidas de los objetos, acabados superficiales y ensamblajes de elementos. La inspección es una tarea dentro del control de calidad, pero se distingue de una labor de test, pues la primera implica un examen completo del producto y la segunda una exploración esporádica. El reconocimiento consiste en la identificación positiva de los objetos detectados en la fases de inspección o de test. La identificación del objeto dentro de los SIVA, en general, no es necesario, ya que ésta asume un conocimiento a priori del problema. Por tanto, inspección, test, y reconocimiento son distintas pero tareas que están relacionadas. Una pieza puede ser

inspeccionada y detectadas sus anomalías, pero su identificación y catalogación corresponderá a una etapa de reconocimiento. Con dicho motivo, el desarrollo de esta tesis lleva dos líneas claramente definidas, una basada en la detección de los defectos, íntimamente ligada al Procesamiento de imágenes, y la otra, en la clasificación de las faltas asentada en el Reconocimiento de formas.

### **2.2.1 Ventajas de la Inspección Automatizada Visual**

En el mundo industrial, las tareas de inspección han sido realizadas tradicionalmente por operarios humanos, bien sea en su totalidad o por muestras representativas del lote. Algunas experiencias [Barri69] han indicado que los inspectores humanos tienden a ser más exactos, en la inspección por lotes muestreados que en la modalidad de 100 % del producto, probablemente por razones de fatigamiento y alienación. Como resultado, la inspección del 100% con operadores humanos requiere de altos niveles de redundancia, lo cual incrementa el coste y el tiempo para la inspección.

Sin embargo, sea por razones de competitividad, como ocurre en las industrias transformadoras de materias primas, acero, aluminio, papel, ..., o porque corresponde con aplicaciones críticas, tales como industria farmacéutica o aeroespacial, donde un simple fallo es inaceptable, la mayoría de estas empresas son conscientes de la importancia de la calidad del producto. El coste de una pobre calidad en los componentes ha sido estimada, en términos de ventas perdidas, entre un 5% y un 10%, y aproximadamente un 20% de ventas sobre productos finales [LeBea90]. Por tanto, el 100 % de la inspección es deseable.

La inspección basada en el muestreo de la producción tiene dos inconvenientes: el riesgo del fabricante y el riesgo del consumidor, la primera viene originada por el error producido al rechazar un lote cuando éste cumple con los requisitos, mientras el riesgo del consumidor es la aceptación de un lote de baja calidad. Las consecuencias asociadas a estos errores son, la pérdida de confianza y de reputación de los productores. La reducción de los errores de inspección tienden a anularse cuando se examina el 100 % del producto.

La inspección automatizada es necesaria, pues los inspectores humanos no son siempre evaluadores conscientes de los productos. De hecho, en los estudios llevados a cabo [Smith93], se ha observado que la inspección visual humana tiene, en el mejor de los casos, una efectividad del 80 %, y además ésta se consigue con una férrea estructura de chequeo. En contraste con estos datos, los sistemas de inspección basados en Visión artificial, resultan tener menores costes laborales y con una medida de calidad objetiva, medible y mejorable. Aun con mayor motivo, los SIVA se presentan como la solución perfecta en ambientes insalubres.

Normalmente, muchas técnicas de inspección son ejecutadas con la intervención de dispositivos que se ponen en contacto con el objeto a examinar, necesitando, a veces, detenerlos y colocarlos según posición y orientación. Mientras en la filosofía SIVA, la posibilidad de colocar los sensores ópticos en los lugares apropiados, permitirán las observaciones sin necesidades de detención. Además, los controles visuales no implican contactos con los objetos, disminuyendo los riesgos de deterioro de los productos.



Tradicionalmente, las operaciones de inspección suelen realizarse al finalizar el ensamblaje del producto. Sin embargo, la inspección durante el proceso de producción ofrece ciertas ventajas. En el caso de sólo detectar fallos en la última fase, los materiales empleados, el tiempo consumido y la mano de obra utilizada, han sido desperdiciados. Por ejemplo, dentro de la industria de PCB, se ha estimado que encontrar un fallo antes de montar los componentes sobre el circuito impreso, costaría alrededor de 25 centavos, mientras el mismo defecto localizado al termino del montaje de componentes, tendría un coste aproximado de 40 dólares [Zeuch88]. Nada impide utilizar SIVA en cualquier parte del proceso, a diferencia de los inspectores humanos que requieren un determinado espacio y un ambiente salubre.

Los procesos de ensamblaje con multitud de movimientos en poco tiempo, hace físicamente imposible la inspección visual humana. Otro tanto sucede, cuando se trata de examinar bandas de materias primas. Las velocidades con que se mueven, como es el caso del acero, el papel, la madera, suelen ser tan elevadas, que la efectividad del operario es decreciente con el paso del tiempo. En definitiva, el operario muestra poca eficacia en ambiente repetitivos con escenas poco cambiantes o con movimientos a gran velocidad.

Una de las mayores prestaciones de los SIVA, es su utilidad como elemento de realimentación en el proceso productivo. Una elevada frecuencia de aparición de un determinado tipo de defecto, podría indicar el mal funcionamiento de una herramienta o de una máquina, en el ciclo. Por ejemplo, dentro de los SIVA implementados en el contexto de esta tesis, la aparición de un determinado nivel de defectos del tipo *shive* en la pasta de papel, indicaba la mala cocción de la madera. Y en el caso de aluminio colado, la falta llamada *sticking*, venía originada por el desgaste de los rodillos de prensado.

Resumiendo, las ventajas atractivas de las máquinas industriales de Visión artificial respecto al sistema de visión humano son :

- La inspección humana es vulnerable. Los SIVA pueden ser emplazados en ambientes peligrosos y en condiciones extremas de espacio.
- La inspección humana es subjetiva. Los SIVA pueden realizar medidas con gran objetividad y repetitividad.
- La inspección humana es falible. Los SIVA nunca comenten un error por aburrimiento o por falta de atención.
- La inspección humana puede ser demasiado lenta. Los SIVA suelen trabajar en tiempo real respecto al proceso manufacturero.
- La inspección humana es insensible a cambios sutiles que afectan a la totalidad de la escena. Los SIVA pueden observar tales cambios y reaccionar ante ellos con objetividad.

- La inspección humana es reticente. Los SIVA pueden estar integrados en el proceso manufacturero, haciendo de bucle de realimentación.

### 2.2.2 Limitaciones de los SIVA

Aunque la Inspección Visual Automatizada pudiera parecer la panacea en la reducción de costes y en el aumento de la calidad, esta solución no es siempre posible. La viabilidad del sistema de inspección depende de varios factores, de su funcionamiento en tiempo real y de su consistencia, robustez y eficiencia. Es difícil definir formalmente el significado de inspección en tiempo real, si bien *Van Gool et al* [VanGo91] han sugerido una definición de trabajo, “que el sistema de inspección visual no sea el mayor cuello de botella en la reducción del ciclo de trabajo o en la velocidad de operación del robot”. Desde la problemática del tiempo real, la validez del sistema depende de la capacidad de procesar el volumen informativo que le llega desde los sensores y consiga catalogar el producto. Por ejemplo, en el caso de examinar una banda de producción, la velocidad de ésta es crítico en la operatividad del sistema. En la práctica y dentro de la inspección de superficies planas, hay velocidades de bandas de acero por encima de los 600 m/min [Dahle90], mientras que en el aluminio colado es de 2 m/min [Plate95a].

De otro lado, la inversión inicial de los SIVA es elevada y consumen mucho tiempo en el desarrollo. Los coste de diseño pueden superar por encima de los 100.000 dólares [VanGo91]. Y generalmente, los costes de ingeniería no pueden ser amortizados entre varios sistemas, por el carácter específico de cada uno de ellos. Casi obligando en cada nuevo diseño a empezar desde cero. Por tanto, la inspección automatizada visual es sólo posible cuando la aplicación va a trabajar sobre un gran volumen de negocio, cuando se demande medidas muy precisas, se requiera inspección consistente o se trabaje en un ambiente muy inhóspito.

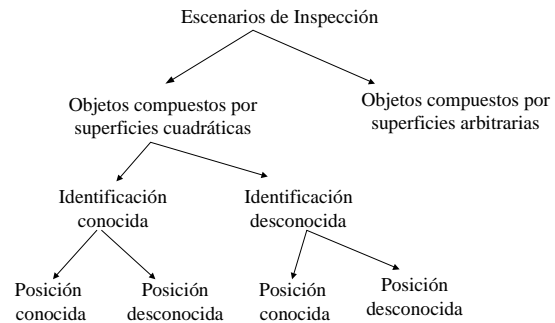
Las complejidades de procedimientos existentes en los SIVA, pueden ser reducidas con los emplazamientos adecuados de los objetos a examinar. Cintas transportadoras, tablas rotatorias, sistemas de posicionamiento y múltiples sistemas mecánicos, están siendo usadas para facilitar las tareas de inspección. Los sistemas mecánicos son piezas fundamentales en el diseño. Por ejemplo, en la inspección de baldosas cerámicas de Fernández [Fernán97a], los algoritmos de detección de faltas en la serigrafía, basados en *template matching*, resulta muy crítico el sistema mecánico de parada y posición de las baldosas. Similares preocupaciones se encuentran en la inspección de pliegos de billetes de bancos de Sebastián [Sebas95]. Las técnicas de iluminación son otra baza en la simplificación del problema. Iluminación a contra luz suele ser frecuente en la inspección de simples objetos. Diferentes técnicas de contraste de iluminación, como uso de la componente especular o luz estructurada, han sido exitosas en la inspección en altas velocidades. Desafortunadamente, los sistemas mecánicos de posicionamiento y las arquitecturas de iluminación no son suficientes para atacar el examen de superficies complejas. La flexibilidad humana de cambiar los puntos de vista, tanto de posición como de luz recibida, hacen de estas virtudes irremplazables por ningún sistema automático.

Las riquezas de matices de los inspectores humanos no pueden ser desestimadas. Wright [Wright88] ha observado como los operarios realizan inspecciones precisas y bajo razonamientos de aceptación / rechazo extremadamente complejos, siendo especialmente cierto cuando es aplicado a formas arbitrarias. Por ejemplo, en el proceso de montajes de piezas aerospacial, la conjunción de maquinaria en la realización de las tareas es de una dificultad tan elevada, que se llega a afirmar que el ciclo de trabajo es no determinista e inestable, y que las valoraciones y habilidades de los operarios son absolutamente necesarios dentro de la monitorización del proceso. La automatización de inspección inteligente y flexible seguirá siendo un reto de investigación en los años venideros.

## 2.2.3 Clasificación de los Sistemas de Inspección Visual Automatizada (SIVA)

### 2.2.3.1 Clasificación atendiendo a la geometría de la superficies a inspeccionar

Newman [Newman95] ha realizado una clasificación sobre los posibles escenarios en los que se enfrentan la inspección visual. Su clasificación se basa en las geometrías de las superficies a observar. La figura 2.1 muestra la dicotomía según el tipo de superficie del objeto a inspeccionar. En el primer nivel del árbol dicotómico, la separación se produce por el tipo de superficie que constituyen los objetos a inspeccionar, distinguiéndose entre ‘superficies arbitrarias’ y ‘superficies cuadráticas’. Muchos de los objetos industriales pueden modelarse usando sólo planos y unas pocas primitivas cuadráticas, como esferas y cilindros. Por tanto, la mayoría de los sistemas de inspección no tratan con las complicaciones de superficies arbitrarias. Sin embargo, con el incremento del uso de plásticos en la industria, las superficies de los objetos tienden a tener formas libres y complejas, generando una demanda de SIVA que manejen geometría de superficies libres.



**Figura 2.1 Escenarios de inspección según geometría de superficies**

En el nivel siguiente del árbol indica si la inspección requiere de la solución de un sistema de reconocimiento de formas. Los objetos que son expuestos delante de los sensores pueden ser conocidos o no de antemano. En el caso normal, las escenas son estructuradas y todos los elementos se encuentran en la base de datos del SIVA. Por último, en el nivel más bajo del árbol está si se conoce o no la posición de los objetos. En la mayoría de los sistemas reportados focalizan el problema bajo el dominio de identificados los objetos y conocidas las posiciones.

En esta tesis, se ha enfrentado al problema de escenarios de superficies modeladas con planos, objetos identificados, entendiéndose que todos los posibles defectos son conocidos y sus posiciones también están encuadradas dentro del escenario SIVA.

### **2.2.3.2 Clasificación atendiendo al tipo de imágenes adquiridas**

Según el tipo de información dada por los sensores, los SIVA se pueden clasificar en inspección basada en imágenes binarias, en niveles de grises, en imágenes de color o en imágenes tridimensionales.

Históricamente, la mayoría de los sistemas de visión comercial para la inspección automática han usado imágenes binarias. Muchos de estos sistemas utilizan imágenes de baja resolución y sus prestaciones suelen ser simples verificaciones, tales como test o presencia de alguna parte [King85]. La información binaria es suficiente para la inspección de muchos objetos industriales, a los cuales basta con representarlos mediante su silueta. Esta arquitectura ofrece ventajas de tipo económico, al ser constituido por sensores de bajo costo, en conjunción de sistemas de iluminación simples, como de tipos a contraluz. La información adquirida permite inspeccionar objetos de altos contrastes entre sí, pero resulta difícil o imposible determinar su orientación o su textura. De otro lado, el nivel de datos a procesar se reduce considerablemente, lo que ayuda tanto en los requerimientos de velocidad de procesamiento como de los costes [Chin92]. Típicamente, los sistemas de visión de imágenes binarias son empleadas en simples verificaciones de las escenas, como puede ser el examen de contornos.

Múltiples sistemas de inspección basados en niveles de grises han sido presentados en la literatura. Sin embargo, hay muy pocos sistemas que sean capaces de ejecutar inspección visual en ambientes complejos, aunque esta matización se puede generalizar para cualquier tipo de información. La mayoría de estos SIVA localizan los defectos mediante el análisis del histograma o utilizando sustracción de imágenes [Batch92]. No obstante, el avance de las tecnologías de procesamiento de señales ha permitido dar un impulso muy importante durante la década de los 90 a SIVA con imágenes en niveles de grises, de hecho en la tabla 2.1 queda reflejada la tendencia actual, imprimida en análisis de imágenes basadas en niveles de grises.

Se ha observado que el color es un factor importante en la inspección tanto de textiles como de alimentos, donde las variaciones de color indican la posibilidad de defectos. Los humanos no suelen utilizar el color para la inspección, pues no se tiene buena memoria para los colores. Sin embargo, la inspección de tareas mediante color son muy apropiadas para la automatización. No obstante, la necesidad de más capacidad de procesamiento ha limitado por ahora un tanto su difusión. Además, factores como la intensidad de la fuente luminosa, el ángulo de incidencia, el nivel de temperatura del foco, la apertura de la lente resultan cruciales en la exactitud del color, lo que dificultan aun más las tareas de inspección [Parth87].

En muchas aplicaciones, se precisa de una información tridimensional. Las piezas mecánicas de superficies complejas requieren de un análisis dimensional, donde la

información 3D es necesaria. En estos casos, la solución no puede estar dada en procedimientos 2D de Visión artificial, habrá de recurrir a la inspección visual con técnicas 3D, tales como pares estereoscópicos, luz estructurada o sensores de rango [González98].

### 2.2.3.3 Clasificación atendiendo a las técnicas empleadas de detección

Las técnicas de los SIVA pueden clasificarse en dos grandes grupos. El primero comprenden las técnicas de casamiento de patrones, *template matching*, mediante las cuales se detectan anomalías visuales comparando las imágenes del producto sometido a inspección con imágenes que no contienen defectos. El segundo grupo incluyen aquellas técnicas basadas en la extracción de características desde la imagen, que comparan los valores con modelos de reglas, cognitivos o estadísticos.

La inspección visual mediante el casamiento con un patrón consiste en una comparación pixel a pixel de dos imágenes: una del producto sometido a inspección y otra del producto ideal, sin defectos. Esta segunda imagen patrón se encuentra almacenada en el sistema y puede ser una imagen obtenida por una cámara, por un conjunto de imágenes procesadas o de un modelo sintético obtenido por CAD. Se suele presentar como una comparación multinivel con correlación normalizada [Matrox97]. Las técnicas de comparación con patrón son flexibles y resultan, en muchos casos, la única forma posible de realizar una inspección fiable. No obstante, presentan inconvenientes cuando hay que buscar un modelo en una imagen en la cual se desconoce su posición aproximada. E incluso un cambio de la orientación del modelo puede resultar insalvable.

La mayoría de los SIVA implementados en la industria y recogidos en la literatura, usan métodos basados en la extracción de características. Se fundamentan en una adecuada parametrización del producto, o lo que es más habitual, una parametrización de los posibles defectos que hacen que el producto sea rechazado. Esta modelización consiste en una serie de características extraídas de la imagen, lo que se conoce como vector de características. Estos parámetros pueden ser áreas, texturas, momentos de inercia, histogramas, etc. Una vez obtenido el modelo de la imagen, se clasifica mediante algunas de las técnicas del Reconocimiento de Formas. Una ventaja inherente a este tipo de método de inspección es la falta de necesidad de mantener almacenada una extensa base de datos de imágenes de patrones. Por otra parte, dichos métodos de inspección presentan la desventaja de que cambios en el diseño del producto inspeccionado exigen una etapa de fuera de línea.

## 2.2.4 Implementación de SIVA

La tabla 2.1 recoge una selección de SIVA implementados en la industria actual. En ella se ven los atributos según tipo de información, método utilizado y geometría de las superficies.

**Tabla 2.1 Referencias de SIVA implementados**

Aplicación	Tipo de información	Método	Geometría	Referencia
Acero	niveles de grises	características	plana	Parsy97
Agricultura	color	características	arbitraria	Poole89
Aluminio	niveles de grises	características	plana	Plate94
Baldosas	niveles de grises	casamiento	plana	Ferná97
Circuito impreso	color	características	plana	Xie91
Circuito impreso	binaria	casamiento	plana	Ninom92
Fecha de caducidad	niveles de grises	casamiento	plana	Plate97a
Madera	color	características	plana	Oulu97
Pasta de papel	niveles de grises	características	plana	Plate98
Pliego de billetes	niveles de grises	casamiento	plana	Sebas95
Textiles	niveles de grises	características	plana	Serran95

### 2.2.5 Literatura de los SIVA

Muchos sistemas de inspección visual automatizada han sido presentados en la literatura especializada. Chin y y Harlow hicieron un primer resumen sobre SIVA [Chin82]. Un segundo trabajo del estado de la técnica, cubriendo el periodo 1981 a 1987, fue publicado de nuevo por Chin [Chin88]. Newman y Jan [Newma95] abordan el examen desde 1988 a 1993. La literatura sobre SIVA es muy amplia y no sólo restringido en artículos y ponencias en el mundo de la Visión Artificial, sino también en Robótica, CAD y en otras disciplinas de la Ingeniería. Además de la aparición de artículos regulares en revistas como *CVGIP Graphic Modelling and Image Processing*, *CVGIP Image Understanding*, *Int. Journal of Computer Vision*, *Machine Vision and Applications*, *IEEE Pattern Analysis and Machine Intelligence*, es posible encontrar sesiones monotemáticas del SPIE o congresos internacionales específicos como los celebrados en Francia (Bourde

95, LeCrouest 97), Italia (Florencia 98) y Japón (Tokio 98). Muchos otros sistemas de inspección no han sido ni incluso reportados, probablemente debido a consideraciones de privacidad.

Como ya ha sido comentado anteriormente, dos son los problemas generales: las técnicas dedicadas a la detección de los defectos, y las referentes a la clasificación de las faltas. Estas dos problemáticas suelen presentarse por separado. Las primeras se especializan en los algoritmos de procesamiento de imágenes, sobre todo, si son defectos locales, en el contraste de los defectos, la aplicación de máscaras, *template matching*, etc. son habituales. Por otro lado, está la clasificación de defectos, que en general parten de un vector de características y utilizan técnicas que van desde sistemas expertos a redes neuronales, pasando por clasificadores paramétricos y una multitud de procedimientos específicos. Todas estas técnicas, tanto las de Procesamiento de imágenes como las de Reconocimiento de Formas, son expuestas en multitudes de libros, artículos, ponencias, documentaciones internas así como páginas WWW, mostrando el auge de una investigación en alza.

## 2.3 Conclusiones

---

Se ha abordado la problemática de la Inspección industrial concluyendo en la necesidad creciente de insertar las operaciones de inspección dentro del proceso productivo. De las muchas técnicas empleadas, la inspección visual automatizada es una rama fundamental para esta nueva filosofía, sobre todo para las industrias de materias primas o sectores que requieren el 100% de la inspección. No obstante, las dificultades de esta tecnología hacen lenta su evolución, convirtiéndose en tema de estudio para muchos investigadores.

# 3

## **Formación de imágenes en Sistemas de inspección visual automatizada (SIVA)**

---

Los SIVA se encuentran con escenas visuales de información en el espacio continuo y sin embargo el desarrollo y diseño de los SIVA se sustenta en tecnología digital. Luego se evidencia el paso de información continua en el tiempo a discreta. La captación de la información presente en el espacio continuo, así como la forma en que ésta va a ser alterada, como consecuencia de la transformación a datos discretos, requiere ser estudiada con cierta profundidad para comprender las limitaciones de resolución que impone el sistema de adquisición en su conjunto.

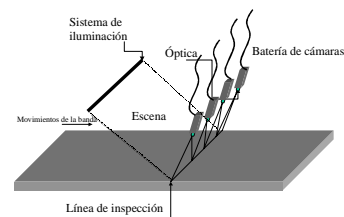
Las escenas que aborda esta tesis, consisten en superficies planas, las cuales van a ser inspeccionadas en la localización visual de defectos en el material. La capacidad de respuesta de los SIVA dependerá, en un primer paso, de la posibilidad de captar la información del exterior lo más fiablemente posible. Aún más, en esta fase, crucial en el



diseño, se requiere reconstruir una visión virtual<sup>1</sup> de la escena, que sea consistente con la realidad puesta delante del sistema de adquisición.

La transformación de la realidad en virtual, debe cumplir con los criterios de la detección de los defectos y aún más importante, con la métrica entre lo real y lo adquirido, esto es, que si se detecta un defecto, el número de píxeles asociados a éste debe ser proporcional al área del defecto. Así en los casos prácticos utilizados en esta tesis, ha sido necesario detectar defectos por debajo de  $0.04 \text{ mm}^2$  en la pasta de papel [Ence94], mientras en el aluminio colado las faltas más pequeñas eran de  $1 \text{ mm}^2$  [Brite92].

La figura 3.1 muestra un esquema de adquisición de escenas visuales de inspección superficial. El motivo es iluminado de manera óptima, tal que aumente el contraste entre el fondo y el defecto; la luz reflejada o transmitida pasa a través de un sistema óptico, adecuando la escena al tamaño del elemento sensor. El transductor está constituido por elementos sensores, que convierten los fotones recibidos en una señal eléctrica. La cámara de estado sólido da un formato a la imagen recibida en señal eléctrica, pudiendo ser de tipo digital o analógico. Ésta es transmitida hasta el computador, ya sea para su monitorización o procesamiento. En el caso de utilizar señal eléctrica analógica, se requiere de la conversión a formato digital. Sea como fuese, se habrá generado una correspondencia entre la realidad y lo almacenado en el computador.



**Figura 3.1 Elementos constituyentes de formación de imágenes en SIVA**

Se pretende abordar las capacidades de medidas de los SIVA y éstas están íntimamente ligadas a las calidades de las imágenes adquiridas. Como se ha podido observar, las posibilidades métricas dependen de una multitud de factores; si se considera sólo la etapa de adquisición de imágenes, los elementos a tratar son los sistemas de iluminación, las características de los sensores y las transmisiones y adquisiciones de las señales de vídeo. El diseño de una aplicación adecuada, requiere del análisis de todos los factores que influyen en las prestaciones, buscando, además, las fuentes de degradación. Estas últimas pueden ser eliminadas y/o compensadas, mediante la selección apropiada de soporte físico, compromisos de medidas y técnicas de calibración. El exacto conocimiento de los factores que influyen en la calidad de la imagen, permitirá con posterioridad la selección correcta de los componentes.

El desarrollo de este capítulo va a tratar de cómo afectan los diferentes elementos del sistema de adquisición de imágenes a la métrica virtual (3.1), centrándose especialmente en el subsistema de iluminación (3.3) y en la selección de arquitecturas de

---

<sup>1</sup> El concepto de virtual hace referencia a la aplicación unívoca entre la información visual real y su representación almacenada en el computador

cámaras de estado sólido (0). Los motivos son que éstos representan los elementos más críticos en la calidad de la imagen y por ende en la métrica. Además son subsistemas genéricos de los SIVA, a diferencia de otros, como el entorno de trabajo, que dependen de la naturaleza del producto concreto a inspeccionar. Además también se estudiarán los modelos de comportamiento de las superficies ante la luz (3.2), que junto con los modelos de fuentes luminosas podrán permitir presentar una metodología para el diseño del sistema de iluminación de los SIVA (3.4). Para acabar se muestran algunos ejemplos de formación de imágenes en SIVA documentados (3.5.3).

### 3.1 Caracterización de imágenes digitales

---

La calidad de una imagen es una impresión subjetiva, que va desde pobre hasta excelente. La habilidad de la percepción realizada por el cerebro, viene afectada no sólo por el sistema de visión humano, sino también de otros sistemas sensoriales, junto con los emocionales, más del aprendizaje y de la memoria. Las relaciones entre éstas son complejas, intrincadas y no comprendidas. Los juicios personales varían ante una misma imagen y las valoraciones pueden ser muy dispares.

Muchas expresiones han sido dadas para categorizar una imagen, cada una es apropiada según un particular conjunto de condiciones. Estas expresiones suelen ser obtenidas desde las observaciones empíricas, donde un grupo de imágenes son ordenadas y posteriormente se infiere alguna ecuación que justifique la clasificación.

En un principio, la calidad de la imagen estaba relacionada con las lentes y la función de transferencia de modulación, MTF (*Modulation Transfer Function*), de la que se hablará más adelante. Con el avance de la tecnología, la calidad se ha centrado en la minimización de la relación señal ruido, SNR, y en la arquitectura de las cámaras. Muchos tests han dado medidas sobre la calidad de la imagen. La mayoría de las métricas están relacionadas con la MTF, la resolución, la velocidad de las imágenes o la relación señal ruido. En general, las imágenes con altos valores de MTF y bajo ruido son clasificadas como imágenes de gran calidad. Las prestaciones del sistema de visión dependen de las cámaras, lentes, monitores, iluminación, etc. Y sólo al final se puede plantear la calidad de la imagen.

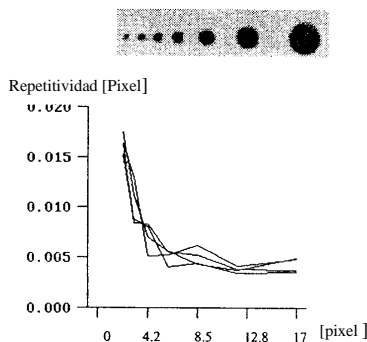
Los más importantes factores que afectan a la calidad geométrica y radiométrica de una imagen adquirida por cámaras de estado sólidos son los siguientes:

- Iluminación
- Superficie a inspeccionar
- Óptica
- Sensores

- Cámaras
- Transmisión y digitalización de imágenes
- Entorno

La selección de una apropiada iluminación es una pieza clave en las tareas de inspección. La uniformidad de luminosidad en la superficie, la estabilidad temporal y su respuesta espectral, así como las propiedades ópticas del entorno deben ser consideradas. La falta de homogeneidad de intensidad luminosa en la superficie inspeccionada, puede acarrear que cientos de píxeles aparezcan como defectuosos, cuando éstos no lo son. Por la extensión y la importancia en el buen funcionamiento de los SIVA, se ha dedicado un apartado aparte para abordar el estudio de las fuentes luminosas (3.3). Estos estudios permitirán con posterioridad establecer criterios científicos en la colocación óptima de los focos luminosos y las cámaras respecto a las superficies a inspeccionar.

El segundo aspecto se refiere a la naturaleza del producto a inspeccionar. El tipo, el color, el tamaño y forma del defecto junto con su fondo, obviamente influyen en las exactitudes de las medidas. Éstas dependen sobre todo del tamaño del defecto y de su contraste. En la figura 3.2, se muestra un defecto con resolución variable de 2 a 17 píxeles/mm, junto con la precisión del sistema en su localización. Como se observa existe un fuerte incremento en precisión, cuando el defecto pasa de 2 a 6 píxel/mm, aunque sólo un suave aumento si se pasa a mayor resolución. En el primer caso, ha habido un incremento de contraste que había sido degradado por la propia MTF del sistema. Un



**Figura 3.2 Precisión y resolución**

aumento desmedido de la resolución, provoca una disminución del gradiente entre el fondo y defecto, que tiene como efecto una degradación del contraste. Por la propia naturaleza, este factor hay que considerarlo según el problema en concreto. No obstante, como se verá en el apartado sobre selección de cámaras, el tamaño del defecto definirá el campo visual de inspección por cada cámara, mientras el contraste entre defecto y fondo, es tema de trabajo abordado desde el tipo de iluminación empleada y las técnicas de procesamiento de imágenes digitales.

Los aspectos referidos a las ópticas, sensores, cámaras y digitalizadoras van a ser abordados con mayor detalle, en una doble vertiente. En el siguiente subapartado, las ópticas, los sensores y las tarjetas de adquisición son estudiadas, dejando para más adelante la selección definitiva de arquitectura de cámaras. Las razones son que estas últimas dependen del tipo de iluminación. Luego será necesario tratar previamente el diseño de la iluminación para establecer que tipos de cámaras son las más adecuadas.

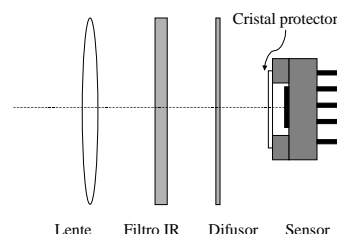
Por último, respecto al entorno, hay que citar la temperatura, la humedad, las vibraciones y las iluminaciones ambientales. Por ejemplo el efecto de la temperatura, éste

puede producir profundos cambios en las cámaras desde que se enciende hasta que alcanza su régimen permanente. Estos cambios provocan errores en magnitudes de píxeles. Sus causas se encuentran en las deformaciones mecánicas y en las variaciones en la frecuencia del reloj, debidos a los cambios de temperatura. Hay casos de multitud de cámaras que requieren más de dos horas antes de alcanzar su estado estable [Sanch98].

### 3.1.1 Deformaciones de las imágenes debidas a las ópticas, sensores y tarjetas de adquisición

#### 3.1.1.1 Óptica

Las cámaras de estado sólido, como muestra la figura 3.3, están constituidas por un numeroso conjunto de elementos ópticos. En cualquier aplicación práctica en la que un objeto o una escena es captada por un dispositivo óptico, el tamaño de la imagen formada es proporcional a la distancia entre el objeto y las lentes. Los sistemas ópticos están formados por lentes, espejos, prismas y demás elementos, que en conjunto actúan estableciendo una transformación determinista de una distribución espacial de luz de entrada hacia una distribución espacial de la luz de salida. También se puede hacer uso del concepto de sistema para comprender la propagación de la luz espacial a través del espacio o a través de algún medio dieléctrico. A medida que la distancia al objeto se incrementa, el tamaño de la imagen decrece y al contrario, a medida que la distancia al objeto disminuye el tamaño de la imagen aumenta [Hect84]. Sin embargo no es posible



**Figura 3.3 Elementos ópticos de una cámara de estado sólido**

modelar el comportamiento del sistema óptico únicamente por esta situación. A pesar de que la imagen se encuentre perfectamente enfocada en el plano imagen del sensor, es necesario evaluar las posibles distorsiones o aberraciones que se pueden originar como consecuencia del paso de la imagen por este sistema físico y que provocan una fuente de error en el proceso completo de adquisición de una imagen. En ocasiones será importante considerar esta fuente de error presente en la imagen digital de partida. No obstante, por el nivel tecnológico actual de estos productos, es tan elevada su exactitud que no afecta en la precisión de equipos por debajo de 1/50 píxeles [Beyer93].

Para el siguiente estudio sobre las fuentes de degradación de las lentes, se asume la simplificación de que los rayos de la luz siempre viajan en línea recta a través de un medio homogéneo. Según esta hipótesis, un haz que pase a través de una apertura, produce una proyección de luz sobre una pantalla con una forma geométrica dependiente de la apertura del sistema óptico[Sebas90]. De cualquier modo, si la distribución de luz en la región entre las áreas oscuras y claras sobre el plano de imagen sensor se examina con cierto grado de detalle, se evidencia que la frontera no se encuentra muy definida. Este efecto es más pronunciado a medida de que el tamaño de la apertura crezca. Desde un punto de vista simplista, la apertura provoca una inclinación de los rayos llamados difracción. Esto provocará un error en la imagen proyectada sobre el plano de imagen del sensor.

Si bien la mayor fuente de error en la obtención de la imagen captada a su paso por el sistema óptico viene provocada por este efecto, existen otras típicas fuentes de error introducidas por la óptica empleada y que se suelen catalogar dentro de uno de los siguientes tipos[Hect84][Jain89]: aberración cromática, astigmatismo, coma,... Todas estas aberraciones y distorsiones originan una imagen proyectada sobre el sensor de captura, con una cierta deformación, que será necesario tener en cuenta en el proceso de modelado de la captura de la imagen. Las distorsiones de las lentes pueden ser modeladas y por tanto es posible fijar el valor de degradación admisible, dependiendo de la tecnología a emplear. Otro inconveniente menos estudiado es el alineamiento de la lente con el sensor, así como la situación del filtro IR, difusor y cristal difusor, que no suelen estar especificadas por el fabricante.

En la mayoría de los sistemas de formación de imagen ópticas, la radiación óptica emitida por un objeto procede de la luz transmitida o reflejada a partir de una fuente de luz incoherente. La radiación de la imagen puede ser en la mayoría de los casos considerada monocromática, en el sentido de que el ancho de banda espectral de la radiación de la imagen detectada en el plano de imagen, es pequeña respecto a la longitud de onda central de la radiación [Pratt91]. Bajo esta hipótesis el sistema de la imagen responderá como un sistema lineal en términos de la intensidad de entrada y salida, permitiendo utilizar los conceptos de respuesta en frecuencia, modelizando la función de transferencia en el dominio de la frecuencia. Así, se define la Función de Transferencia Óptica (OTF) como la transformada de Fourier normalizada, pasando del dominio de la intensidad al dominio de las frecuencias. A partir de la OTF se puede deducir las fuentes de error generadas por la imperfección del sistema óptico. Tal como ha sido comentado anteriormente, el nivel tecnológico de los sistemas ópticos empleados en los trabajos prácticos de esta tesis, no ha hecho precisar un estudio que abordase las deformaciones originadas por la óptica. No obstante, si se han utilizado recomendaciones prácticas como hacer uso de la apertura mínima del iris en la adquisición de las imágenes.

### 3.1.1.2 Sensores

Los fotodetectores son los encargados de transformar la información lumínica de entrada, en información eléctrica de salida. La mayoría de los sensores utilizados en Visión artificial son los dispositivos de estado sólido conocidos como CTD (*Charge Transfer Devices*)[Amore90][Beyer93a]. Existen dos tipos principales de dispositivos con características claramente diferenciales entre sí: los CCD (*Charge Coupled Devices*), y los CID (*Charge Injection Devices*), cuyas diferencias están bien recogidas en la bibliografía [Holst96]. Serán tratadas más adelante (0), en el estudio de las arquitecturas de cámaras.

Una característica de muchas cámaras de estado sólido con dispositivos CCD, que afecta enormemente a la resolución de la imagen obtenida, es la presencia de regiones no sensibles en la matriz de elementos CCD sobre la que se proyecta la imagen tras el sistema óptico, es decir, la presencia de zonas del sensor no activas. Aunque se abordará en el apartado relacionado con la selección de cámaras, el tipo de transferencia entre el sensor y los registros de desplazamiento, en algunas estructuras, provoca esta pérdida de zona sensible.

A pesar de ser éste el problema fundamental que produce una pérdida significativa de resolución espacial al utilizar este tipo de dispositivos, existen otras propiedades en estos sistemas que originan deformaciones en el tratamiento de la imagen. Idealmente el fotodetector actúa como un convertidor de intensidad óptica a corriente del detector, esto es, actúa como un convertidor de fotones incidentes a electrones recibidos por el detector[Pratt91][Jain89]. El detector produce una corriente de señal a través de un filtro paso bajo, creando una tensión a través de una carga. La fuente de error más común asociada con los fotodetectores, respecto a la electrónica asociada, consiste en el ruido térmico resultante de las fluctuaciones de electrones aleatorios en elementos resistivos dentro del amplificador del sensor. Según Pratt, el ruido térmico puede ser modelado como un proceso estocástico normal aditivo, independiente del campo de imagen sensitivo. Un análisis más detallado, requiere del conocimiento de la circuitería del sensor. No obstante, la corriente de ruido térmico generada se puede modelar como un proceso aleatorio gaussiano de media cero y varianza dependiente del sensor utilizado.

Por otro lado aun no teniendo en cuenta este ruido térmico generado, la corriente del fotodetector no tiene un valor verdaderamente constante aún cuando la intensidad de luz incidente sea la misma. Los sensores fotoeléctricos exhiben una incertidumbre como consecuencia de la naturaleza mecánica - cuántica de la luz. A niveles bajos de luz, el número de electrones emitidos por un fotodetector está gobernado por una densidad de probabilidad de Poisson. La incertidumbre resultante en el conocimiento de la corriente del detector, se denomina ruido de disparo (*shot*) en detectores fotoemisivos, y ruido de generación - recombinación en conductores fotoconductorivos y fotovoltaicos [Reino96]. En definitiva, el comportamiento de los sensores fotoeléctricos es un comportamiento no lineal, siendo esta no linealidad dependiente de las características del sensor utilizado. Además del efecto de la no linealidad del sensor y del ruido térmico, hay que considerar las interacciones locales entre elementos adyacentes en el array, que en su conjunto deforman la información recibida.

Por estos motivos, es requerida la modelización del comportamiento del plano sensor, que es realizada mediante lo que se conoce como función de extensión puntual (PSF, *Point Spread Function*), cuyo análisis desborda el temario de esta tesis. Esta función refleja las limitaciones del sensor para representar de una forma precisa cada punto sin la influencia de los vecinos.

Las características radiométricas y geométricas de los sensores de estado sólido han mejorado drásticamente, hasta tal punto, que puede considerarse como el mejor elemento del sistema de imágenes digitales[Beyer93]. Las prestaciones de los parámetros radiométricos, tales como relación señal ruido (SNR), no-uniformidad de corriente oscura (DSNU), respuesta fotónica no uniforme (PRNU) son excelentes. Un elemento de potenciales problemas es el tamaño de la superficie y su topografía. Los sensores de gran tamaño son usados para longitudes de onda superiores a los 500 nm [Blouk87]. Mientras, las diagonales de los sensores están normalizados a 1/4", 1/3", 1/2" y 2/3". El efecto de la topografía de la superficie (estructura de las puertas, microlentes) no ha sido investigado hasta la fecha.

Sin embargo, las cámaras por la multitud de componentes que las constituyen, representan uno de los elementos más críticos. Algunos de los elementos que inducen a la degradación son: la autogranancia (AGC), los filtros paso bajo, correcciones de gamma y control del iris [Balts92]. La estabilidad mecánica entre el sensor y los elementos ópticos, frecuentemente resulta insuficiente. Sólo algunos fabricantes usan la suficiente estabilidad. Por estos motivos, volverá a tratarse la elección del tipo de cámara, al resultar ser un elemento fundamental en la calidad de la imagen.

### 3.1.1.3 Digitalizadoras

El digitalizador es el último componente físico presente en el proceso de formación de una imagen digital. En este elemento se realizan dos procesos diferentes, la cuantificación de la señal y su muestreo. Para comprender los errores que se introducen en el proceso de formación de la imagen discreta, como consecuencia únicamente de la acción del convertidor analógico/digital, se van abordar por separado el proceso de cuantificación y el de muestreo. Aunque estos dos procesos tienen componentes interrelacionadas, es bueno considerarlos como separados para estudiar los errores debidos a unos y a otros, pues simplifica la exposición.

Los errores de muestreo son originados por no cumplir el teorema de Nyquist, provocando el efecto de solapamiento en frecuencias o *aliasing*, llevando consigo una pérdida de información en la señal discreta de salida. Para evitar esta falta se recurre a la utilización de filtros *anti-aliasing*, cuyo inconveniente es la pérdida de información correspondiente a las componentes de alta frecuencia. No obstante, las pérdidas de precisión son del orden de 0.08 para casos extremos [Reino96]. De otro lado, en el proceso de cuantificación se mejora la precisión al aumentar el número de niveles de grises. La incertidumbre introducida por la cuantificación de la señal analógica en niveles de grises implica que las características geométricas de los objetos disminuyen con una disminución del rango de niveles de grises. Pero hay otros factores que también juegan en la determinación de resolución en la digitalizadora. Imágenes con elevado número de grises son más difíciles de tratar computacionalmente, requieren de más memoria para ser almacenadas y su procesamiento necesita más tiempo. Por lo que suelen utilizarse imágenes con 256 niveles de grises, requisito suficiente para la mayoría de las aplicaciones SIVA.

Otro aspecto a destacar es la sincronización entre el digitalizador y la señal enviada por la cámara. La mayoría de los digitalizadores establecen sincronismo de línea (PLL), esto es, utilizan una sincronización entre el digitalizador y la señal proveniente de la cámara al comienzo del cuadro, recuperando la pérdida de sincronismo en cada línea. Ello introduce una inestabilidad posicional de varias centésimas de pixel, es decir, cada línea se encuentra desplazada con respecto a su línea contigua (en el campo) un cierto valor[Beyer93a]. En cambio, si se usa un muestreo de pixel síncrono, es decir, se establece líneas de control para muestrear en cada instante el pixel correspondiente, se asegura una sincronización precisa con los datos obtenidos a la salida del digitalizador, presentado una mayor fiabilidad. Este tipo de transmisión es tan efectiva como la utilizada en cámaras digitales. Para estos últimos casos, se puede obtener una precisión de 0.004 píxeles[Beyer93a].

Resumiendo, desde que se tiene la imagen en el entorno que se desee captar, hasta que se envía a la memoria del computador, ésta ha sufrido diversas degradaciones que son necesarias modelar. La función de transferencia óptica (OTF) se encarga de modelar la componente difuminadora de las lentes, siendo la OTF una medida de la deformación producida en la imagen captada como consecuencia de la distorsión geométrica. La función de extensión puntual (PSF) modela las características de muestreo espacial por parte de los fotosensores, encargados de captar la imagen del entorno. El nivel tecnológico actual es tan elevado en la fabricación de estos componentes que las pérdidas de precisión son del orden de magnitud de 1/50 de pixel. De otro lado, las prestaciones de las tarjetas digitalizadoras son tan variadas como modelos hay en el mercado. Numerosos problemas tienen las digitalizadoras, tales como pérdidas de sincronismo, no linealidades y efectos de solapamiento en frecuencias (*aliasing*). La mayoría de los factores afectan a la exactitud de la métrica, pudiendo provocar errores de hasta 0.5 píxeles. Las diferentes técnicas de sincronización es uno de los factores más decisivo. Si se utiliza sincronización de línea el error va desde 0.5 pixel a 1 pixel, mientras una sincronización por pixel reduce el error a 0.05.

Sólo queda por reseñar algunas consideraciones prácticas efectuadas a lo largo del proceso experimental, como ha sido el uso de lentes de mayor formato que el plano sensor, utilizando exclusivamente la zona central de la lente, evitando la mayoría de las degradaciones ópticas. Conjuntamente a esta acción, se ha tomado imágenes con el iris lo más cerrado posible, favoreciendo la concentración de los rayos sobre el foco. Respecto al digitalizador y al utilizar cámaras sin capacidad de sincronismo, se han definido *drivers* que pudieran sincronizar todo lo más posible con el pixel, en el sentido de sólo muestrear tanto en horizontal como en vertical por el número de píxeles existentes en el plano sensor.

De este estudio preliminar se desprende que, la calidad de la imagen depende, sobre todo, de una iluminación eficaz y una elección óptima de las cámaras. Por tanto, los siguientes puntos tratan sobre el realce visual de superficies planas y de cómo determinar los criterios para una buena selección de cámaras atendiendo a la aplicación en concreto.

## 3.2 Realce visual de superficies planas

---

El realce visual de la escena es el primer subsistema del modelo genérico de los SIVA. Es una de las llaves en la solución de problemas de Visión artificial. El diseñador debería tener en mente dos ideas al considerar el sistema de iluminación:

- Maximizar el conocimiento a priori de la escena.
- Intentar trivializar el problema de análisis de imágenes, tanto como sea posible. Un eficiente sistema de iluminación requiere un menor tratamiento de la señal.



Para maximizar el contraste en la escena hay que explotar el conocimiento a priori en varias direcciones. Una de ellas es el estudio de las propiedades de los materiales ante una excitación luminosa. La cantidad de luz reflejada en una superficie depende en gran medida de su rugosidad. Es marcadamente diferente la respuesta de una superficie lisa a otra rugosa. De hecho se ha utilizado el comportamiento desigual del material defectuoso respecto al no defectuoso ante una exposición lumínica, para incrementar el realce entre ambos. Luego se requiere estudiar el comportamiento de reflexión de la luz en superficies planas. Otra de las direcciones tratada es la óptima posición del foco luminoso y la cámara ante la superficie a inspeccionar. Partiendo del modelo de comportamiento de superficies, se trata de investigar cual es la posición más adecuada de los focos y las cámaras, con el propósito de aumentar el contraste entre los defectos y el fondo.

Respecto a la trivialización del problema para aplicaciones SIVA, la problemática de identificación de faltas se simplifica, muchas veces, consiguiendo una iluminación uniforme en el campo visual. Este tema también será objeto de estudio, de cómo diseñar la fuente luminosa para conseguir una óptima iluminación.

A continuación se va a desarrollar una metodología de trabajo para construir el equipo de iluminación, basándose en el estudio de reflexión de la luz en superficies planas, búsqueda óptima de foco - superficie - cámara y de cómo tratar de obtener una iluminación uniforme en el campo visual.

### **3.2.1 Mecanismos de reflexión de la luz sobre superficies planas**

Dentro de la problemática de la iluminación, la luz reflejada en superficies planas ha sido motivo de estudio en esta tesis. Detectar defectos visuales en el aluminio, por ejemplo, precisa de la óptima localización de los focos luminosos y de los sensores. Para la determinación geométrica de ambos, se requiere del estudio de los mecanismos de reflexión de la luz.

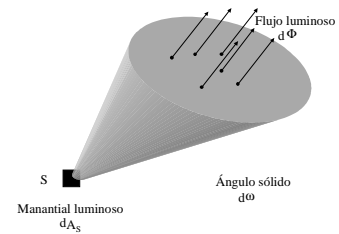
Se pretende mostrar en las siguientes páginas, los modelos de reflexión proveniente de una luz incidente sobre superficies planas, y de cómo aplicar los resultados en el diseño del sistema de iluminación de un SIVA.

Hay dos filosofías distintas para abordar los estudios de la reflexión de la luz: modelos ópticos geométricos y modelos ópticos físicos. Los primeros asumen que las trayectorias de la luz van en línea recta, mientras los segundos las tratan como ondas electromagnéticas, cuyos comportamientos siguen las ecuaciones de Maxwell. Los modelos usados por los investigadores actuales se fundamentan en los trabajos de Phong, Torrance – Sparrow, Lambert, y Beckmann-Spizzichino. Antes de exponer los modelos de reflexión, se tratan los conceptos básicos de la Radiometría y de los modelos de superficie, fundamentales para entender las diferentes modelizaciones.

### 3.2.1.1 Conceptos básicos de Radiometría

La energía radiante emitida por una fuente luminosa, por unidad de tiempo y por unidad de área, depende de la naturaleza de la superficie y de su temperatura. Esta radiación es una mezcla de diferentes longitudes de onda. Por ejemplo, a la temperatura de 300°C, la más intensa de estas ondas tiene una longitud de 500nm, que se encuentra en la región del infrarrojo, mientras a 800°C, un cuerpo emite bastante energía radiante visible para ser luminoso por si mismo y parece incandescente; no obstante, la mayor parte de la energía emitida es transportada, con mucho, por ondas infrarrojas. A 3000°C, que es aproximadamente la temperatura del filamento de una lámpara de incandescencia, la energía radiante contiene bastantes longitudes de onda visibles, de las comprendidas entre 400nm y 700nm, de modo que el cuerpo parece casi rojo blanco [Sears81].

El flujo luminoso emitido por un manantial luminoso depende de la abertura y del tamaño del cono de radiación, esto es, del ángulo sólido. Se considera el manantial luminoso puntual S de la figura 3.4. Y sea  $d\Phi$  el flujo luminoso que atraviesa una sección cualquiera de un estrecho cono de ángulo sólido  $d\omega$  estereorradianes, cuyo vértice coincida con el manantial. La intensidad luminosa del manantial, en la dirección del cono, se define como la razón del flujo,  $d\Phi$ , al ángulo sólido,  $d\omega$ , o sea, como el flujo luminoso emitido por unidad de ángulo sólido. La intensidad luminosa se representa por I:

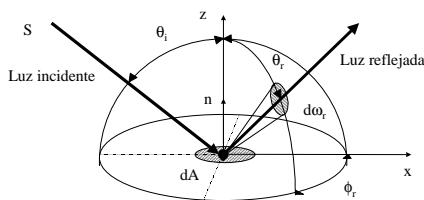


**Figura 3.4 Flujo luminosos**

$$I = \frac{d\Phi}{d\omega} \quad (3.1)$$

La unidad de intensidad es vatio por estereorradián. La mayor parte de los manantiales no emiten cantidades iguales de flujo por unidad de ángulo sólido en todas las direcciones.

Sea  $dA$ , en la figura 3.5, un elemento de superficie cuya normal  $n$  forma un ángulo



cenital  $\theta$  y acimut  $\phi$  respecto a un manantial puntual S. Asumiendo que la fuente se encuentra en el plano X-Z y determinado según la dirección del ángulo cenital  $\theta_i$ . La relación entre el flujo incidente en la superficie respecto al área, define la iluminación incidente como:

$$E_i = \frac{d\Phi_i}{dA} \quad (3.2)$$

**Figura 3.5 Sistema de coordenadas locales**

De otro lado, a la fracción del flujo incidente que sea reflejada en la dirección  $(\theta_r \phi_r)$ , desde la superficie al sensor se la llama

radiación reflejada. La radiación reflejada de la superficie es definida como el flujo emitido por unidad de área reflejada y por unidad de ángulo sólido en la dirección vista por el sensor, así se define la radiación radiada,  $L$ , como:

$$L = \frac{d^2\Phi}{dA \cos\theta_r d\omega_r} \quad (3.3)$$

donde  $d\omega_r$  es el ángulo sólido del sensor visto desde la superficie reflejada. Considerando que la superficie es iluminada desde una dirección  $\theta_i$ , se define la función de distribución reflejada bidireccional (*bi-directional reflectance distribution function*, BRDF),  $F_r$  de una superficie, como el nivel de radiación reflejada de una luz incidente vista desde  $(\theta_r, \phi_r)$  por unidad de iluminación incidente

$$F_r(\theta_i, \theta_r, \phi_r) = \frac{L_r(\theta_i, \theta_r, \phi_r)}{E_i(\theta_i)} \quad (3.4)$$

Por último, el principio de conservación de la energía indica que la radiación incidente en un objeto, parte de ella es transmitida (refracción), otra absorbida y la demás será reflejada, esto es:

$$\Phi_{INCIDENTE} = \Phi_{TRANSMITIDA} + \Phi_{ABSORBIDA} + \Phi_{REFLEJADA} \quad (3.5)$$

En la tabla 3.1 aparecen las magnitudes radiométricas en el Sistema Internacional

Magnitud física	Símbolo	Unidad en S.I.
Flujo luminoso	$\Phi$	W
Intensidad luminosa	I	W sr <sup>-1</sup>
Iluminación	E	W m <sup>-2</sup>
Radiación	L	W m <sup>-2</sup> sr <sup>-1</sup>

**Tabla 3.1 Unidades del S.I. de las magnitudes de Radiometría**

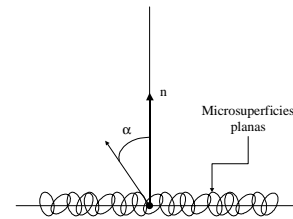
### 3.2.1.2 Modelos de superficie planas

La manera en la que la luz es reflejada en una superficie, depende de entre muchos factores, de las formas macroscópicas que constituyen las superficies. Así mientras en

superficies lisas al ser iluminadas con un haz incidente, la luz reflejada sobre ellas toma una sola dirección, en superficies rugosas tienden a difuminarse en múltiples direcciones. Para establecer con exactitud el fenómeno de la reflexión, es necesario tener un conocimiento a priori de la estructura de la superficie, es decir, un modelo de éstas. Se pueden catalogar en dos clases: mapas de perfiles y modelos aleatorios. Un exacto perfil puede ser determinado con las medidas de alturas en cada punto de la superficie, por algún tipo de dispositivo existente en el mercado. No obstante, este método es caro e impracticable en muchos casos. Por lo tanto, suele modelarse mediante funciones bidimensionales de distribución que tienden aproximarse al verdadero comportamiento de la superficie ante un haz de luz incidente.

#### 3.2.1.2.1 Modelos basados en funciones de distribución de ángulos de inclinación

Una superficie puede ser modelada a partir de una colección de microsuperficies planas, tal como queda reflejado en la figura 3.6. Cada microsuperficie tiene su propia orientación. El ángulo de inclinación,  $\alpha$ , es el parámetro que determina el grado de oblicuidad respecto a la normal del plano medio. En el caso de superficies isotrópicas, la distribución de  $\alpha$  sería uniforme, y las microsuperficies estarían rotadas respecto a  $n$  con igual probabilidad. Esto lleva, a que puede modelarse la superficie mediante una función de distribución unidimensional. Por ejemplo, la superficie responde a una función de densidad gaussiana para el nivel de microfacetas, con  $N(\mu_\alpha, \sigma_\alpha)$ . Grandes valores en la varianza,  $\sigma_\alpha$ , indicarán la presencia de superficies rugosas, y al contrario, valores pequeños señalarán superficies lisas. Los modelos basados en la función de distribución del ángulo de inclinación en las microsuperficies son muy populares, pues la difusión de la luz reflejada es explicada por los niveles de inclinación y no por la cartografía (altura) de la superficie. Por esta razón, los modelos de inclinación, aunque relativamente ambiguos, son ampliamente utilizados en los problemas de reflexión de la luz en superficies.

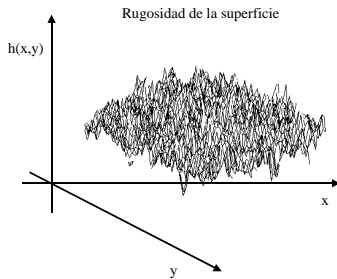


**Figura 3.6 Superficie formada por microfacetas**

#### 3.2.1.2.2 Modelos basados en funciones de distribución de perfiles

La altura de la superficie puede ser expresada en función de las coordenadas  $(x, y)$ , como muestra la figura 3.7. La forma de la superficie es determinada por la función de distribución de la altura,  $h$ . Sea por ejemplo  $h$  con distribución normal, media cero y varianza  $\sigma_h$ , la función de densidad viene dada por:

$$p(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_h} e^{-(h^2/2\sigma_h^2)} \quad (3.6)$$



$\sigma_h$  representa la rugosidad de la superficie. No obstante, las superficies no están unívocamente relacionadas con la función de distribución de las alturas; no dice nada sobre las separaciones entre valles y colinas existentes. Dos superficies pueden tener igual media y varianza, mientras sus apariencias son totalmente distintas. Con objetivo de reforzar el modelo, se define un coeficiente de correlación,  $C(\tau)$ , que mide la relación entre la altura estimada y la de dos puntos de la superficie separados una distancia  $\tau$ :

**Figura 3.7 Niveles de altura en la superficie**

$$C(\tau) = e^{-(\tau^2/T^2)} \quad (3.7)$$

donde  $T$  es la distancia de correlación. La variación de los parámetros  $\sigma_h$  y  $T$  de los modelos de superficie, generan aproximaciones que casan con la apariencia real de la superficie.

### 3.2.1.3 La rugosidad de las superficies

La impresión visual de los humanos es bastante vaga con el concepto de rugosidad. De manera que una superficie vista de cerca parece rugosa y algo más alejada, puede llevar a la conclusión de calificarla como lisa. De hecho, en la determinación de faltas visuales, el inspector, a veces, hace cambios de vistas para ayudarse en el juicio de si es defecto o no.

A diferencia de las valoraciones humanas, la teoría de reflexión tiene bien definida el concepto de rugosidad; ésta debe relacionar las irregularidades de la superficie con las direcciones que tome la luz ante un haz de luz incidente. Para superficies cuyas irregularidades son menores que la longitud de onda de la luz, la mayor parte del flujo incidente será reflejada especularmente en una sola dirección. En caso contrario, si las irregularidades superan la longitud de onda del haz, la superficie difuminará la luz en múltiples direcciones.

En el mundo industrial, la rugosidad se define como el valor medio de las alturas de la superficie, y esta definición ha sido objeto para medir el acabado superficial de los productos manufactureros[ANSI78].

### 3.2.1.4 Modelos ópticos geométricos

La óptica geométrica es aplicable en situaciones, donde el carácter electromagnético de la luz, puede ser ignorado. Una de las características de la luz visible es su corta longitud de onda. En general, la longitud de onda de la luz incidente es mucho

más pequeña que las dimensiones de las imperfecciones, y en estos casos, es posible resolver, de manera aproximada, el problema de la reflexión.

#### 3.2.1.4.1 Modelo de Phong

El modelo de Phong [Phong75] fue desarrollado dentro de la comunidad de computadoras gráficas, y está siendo ampliamente usado debido a su sencillez. Este modelo explica bien el efecto de reflexión de la luz sobre materiales dieléctricos, para el caso de ángulo de incidencia y reflexión sean significativamente inferiores a  $\pi/2$ . El modelo predice la reflexión basándose en el ángulo de incidencia,  $\theta_i$ , y en el ángulo entre la dirección especular y la dirección del plano sensor,  $\alpha$ . En él se asume que la máxima reflexión se obtiene cuando coincide el ángulo de reflexión con la dirección especular, esto es,  $\theta_i = \theta_e$  y  $\phi_e = 0$ . Para el modelo de Phong la radiación reflejada sigue la expresión:

$$F_r = \frac{kL_r}{\cos \theta_i} = A + B \cos^n \alpha \quad (3.8)$$

donde  $k$ ,  $A$  y  $B$  son constantes y  $n$  es un índice que muestra la rugosidad de la superficie. De su simplicidad hace que el modelo falle al predecir una importante característica: el halo especular. Aun más, la máxima reflexión de las superficies no ocurre en la dirección especular, tal como predice dicho modelo. Por lo que es necesario buscar un mejor modelo, como el que se presente a continuación, el de Torrence Sparrow

#### 3.2.1.4.2 Modelos de Torrence Sparrow

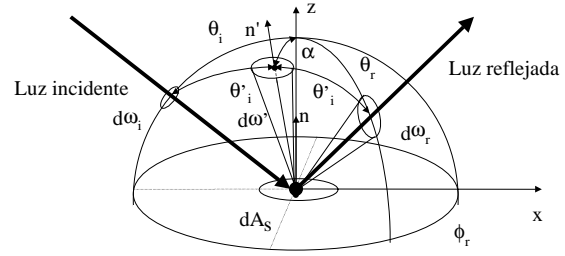
El modelo de Torrence Sparrow [Torre67] se basa en los conceptos vistos con anterioridad sobre superficies formadas por microfacetas. La superficie tiene una orientación media  $n$ , y la inclinación de cada microsuperficie,  $\alpha$ , está definida por una función de densidad referenciada sobre  $n$ . Cada microsuperficie refleja sólo la componente especular según su propia inclinación. Luego, al haber una distribución aleatoria de las microsuperficies, la luz incidente sobre la superficie, no sólo considera el elemento especular, sino además componentes de la luz difusa, permitiendo determinar la radiación superficial en cualquier dirección.

Torrence y Sparrow asumen que la función de densidad es normal. Además, también parte de tener rotaciones sobre la normal a la superficie de carácter simétrico. Por tanto, se tendrá una distribución unidimensional  $N(0, \sigma_\alpha)$ .

$$p(\alpha) = ce^{-(\alpha^2 / 2\sigma^2)} \quad (3.9)$$

donde  $c$  es una constante, y la varianza, como ya se vio, representa la rugosidad del modelo.

Considérese la geometría mostrada en la Figura 3.8. El área de superficie  $dA_s$  está localizado en el origen de coordenadas del marco, y la normal a la superficie,  $n$ , coincide con la dirección de  $z$ . La fuente luminosa se sitúa en el plano  $(x-z)$ , y éste es incidente a la superficie con un ángulo  $\theta_i$ . El modelo pretende calcular la radiación,  $L_r$ , en cualquier dirección definida por  $\theta_r$  y  $\phi_r$ .



Modelo de Torrance - Sparrow

**Figura 3.8 Relaciones geométricas del modelo de Torrance -Sparrow**

Sólo algunas microfacetas radiarán componente especular en la dirección del ángulo sólido  $d\omega_r$  ( $\theta_r \phi_r$ ), y éstas tendrán como normal  $n'$ , fijada por el nivel de inclinación  $\alpha$  y ángulo de incidencia  $\theta'_i$ . El número de facetas por unidad de superficie orientadas dentro del ángulo sólido  $d\omega'$ , es igual a  $p(\alpha)d\omega'$ . Por tanto, el área de puntos en  $dA_s$  orientados dentro de  $d\omega'$  es igual a  $p(\alpha)d\omega' dA_s$ . Considerando  $a_f$  el área de cada microsuperficie, el área de puntos dentro de  $dA_s$  que refleja luz incidente con ángulo  $\theta_i$ , dentro del ángulo sólido  $d\omega_r$ , es igual a  $a_f p(\alpha)d\omega' dA_s$ . Todas las microsuperficies son asumidas con el mismo ángulo de incidencia  $\theta_i$ . El flujo incidente en el conjunto de facetas reflejadas se determina por:

$$d^2\Phi_i = L_i d\omega_i \left( a_f p(\alpha) d\omega' dA_s \right) \cos \theta'_i \quad ( 3.10 )$$

Donde  $L_i$  es la radiación incidente. La fracción de luz incidente que es reflejada por cada microsuperficie está determinada por los coeficientes de reflexión de Fresnel. Los coeficientes  $F_{||}(\theta'_i, \eta')$  y  $F_{\perp}(\theta'_i, \eta')$  de Fresnel determinan el campo electromagnético reflejado según la componente especular [Nayar91][Ikeuc94]. El coeficiente de Fresnel  $F'(\theta'_i, \eta')$  para la luz incidente puede ser expresado como combinación lineal de los coeficientes de Fresnel paralelo y perpendicular de las ondas incidentes:

$$F'(\theta'_i, \eta') = h |F_{||}(\theta'_i, \eta')|^2 + v |F_{\perp}(\theta'_i, \eta')|^2 \quad ( 3.11 )$$

donde

$$h, v \geq 0 \text{ y } h + v = 1 \quad ( 3.12 )$$

Torrence y Sparrow también consideraron el efecto de sombras de unas microsuperficies sobre otras. Las facetas adyacentes pueden obstruir tanto el flujo incidente como el reflejado. Para compensar estos efectos, los autores introducen el concepto de efectos de atenuación geométrica,  $G(\theta_i, \theta_r, \phi_r)$ , cuyo rango se encuentra entre cero y uno. Partiendo de las consideraciones hechas, el flujo reflejado,  $d\Phi_r$ , dentro del ángulo sólido  $d\omega'$ , el cual fija el flujo incidente,  $d\Phi_i$ , que refleja en la dirección  $(\theta_r, \phi_r)$ , estará determinado por:

$$d^2\Phi_r = F'(\theta'_i, \eta') G(\theta_i, \theta_r, \phi_r) d^2\Phi_i \quad (3.13)$$

la radiación,  $L_r$ , de  $dA_s$  en la dirección  $(\theta_r, \phi_r)$ , vendrá dada por:

$$L_r = \frac{d^2\Phi_r}{d\omega_r dA_s \cos\theta_r} \quad (3.14)$$

introduciendo las ecuaciones de (3.9) a (3.14) quedará como:

$$L_r = \frac{F'(\theta'_i, \eta') G(\theta_i, \theta_r, \phi_r) L_i d\omega_i (a_f p(\alpha) d\omega' dA_s) \cos\theta'_i}{d\omega_r dA_s \cos\theta_r} \quad (3.15)$$

al haber partido de aquellas microsuperficies cuyas normales estén dentro del ángulo sólido  $d\omega'$ , capaces de reflejar la luz en el ángulo sólido  $d\omega_r$ , ambas se encuentran relacionadas por la expresión:

$$d\omega' = \frac{d\omega_r}{4 \cos\theta'_i} \quad (3.16)$$

insertando la relación entre ángulos sólidos y la función de densidad de las microfacetas, la radiación queda como:

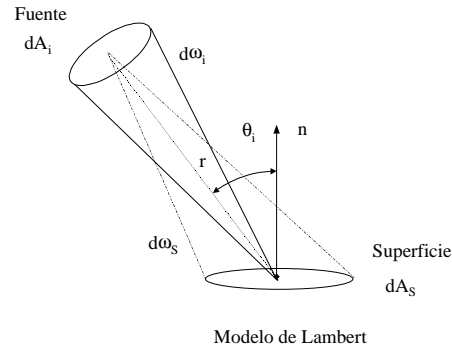
$$L_r = k \frac{L_i d\omega_i}{\cos\theta_r} e^{-(\alpha^2/2\sigma^2)}$$

$$k = \frac{ca_f F'(\theta'_i, \eta') G(\theta_i, \theta_r, \phi_r)}{4} \quad (3.17)$$

#### 3.2.1.4.3 Modelo de Lambert



Lambert [Lamb60] fue el primero en investigar los mecanismos de reflexión difusa. Las superficies que satisfacen las leyes de Lambert, aparecen igualmente iluminadas en todas las direcciones. Como muestra la Figura 3.9, la luz penetra en la materia y se encuentra heterogeneidad microscópica, provocando en la luz componente de reflexión y refracción. Las componentes especulares cruzan sus trayectorias con una variedad de direcciones, resultando una reflexión difusa. Cuando la radiación es constante en toda la superficie, se denomina reflexión lambertiana.



**Figura 3.9 Relaciones geométricas en el modelo de Lambert**

La radiación de una superficie lambertiana,  $L_r$ , es proporcional a su radiada. Considerando una superficie de área infinitesimal,  $dA_s$ , iluminada desde un manantial,  $dA_i$ . El flujo incidente en  $dA_s$  será determinando desde la radiación fuente,  $L_i$ , como:

$$d^2\Phi_i = L_i d\omega_s dA_i \quad (3.18)$$

Teniendo en cuenta las relaciones entre la superficie y el ángulo sólido

$$\begin{aligned} dA_i &= r^2 d\omega_i \\ d\omega_s &= \frac{\cos \theta_i dA_s}{r^2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Introduciendo las relaciones geométricas, queda:

$$d^2\Phi_i = L_i d\omega_i dA_s \cos \theta_i \quad (3.20)$$

la iluminación en la superficie está determinada por:

$$E_i = \frac{d\Phi_i}{dA_s} \quad (3.21)$$

y como la radiación reflejada es proporcional a su radiada,  $E_i$ . Obsérvese que  $E_i$  es cero cuando el ángulo de incidencia sea  $\pi/2$ . Luego, la radiación en la superficie puede ser escrita como:

$$L_r = k_{dif} L_i d\omega_i \cos \theta_i \quad ( 3.22 )$$

donde  $k_{dif}$  determina la fracción de la energía incidente que es reflejada.

### 3.2.1.5 Modelos físicos ópticos

La luz es un fenómeno electromagnético. Por tanto, en un sentido estricto, los problemas ópticos deberían ser planteados desde la Electrodinámica. El modelo de Beckmann-Spizzichino [Beckm63] describe los fenómenos de reflexión tanto de superficies lisas como rugosas.

#### 3.2.1.5.1 Modelo de Beckmann-Spizzichino

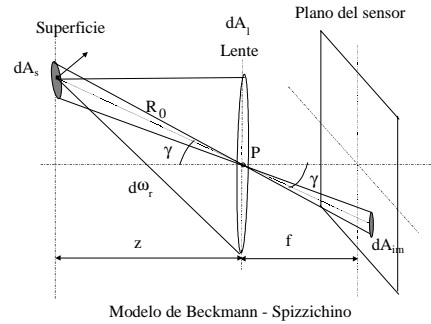
El modelo de reflexión de Beckmann-Spizzichino explica el comportamiento de la energía electromagnética especular, procedente de un haz luminoso incidente sobre una superficie rugosa. Como en los anteriores modelos, se pretende calcular la radiación de la superficie en componentes especulares. Considerando la formación geométrica de una imagen en un sensor (por ejemplo, una cámara CCD), según muestra la figura 3.10, se definen,  $dA_s$  como el elemento de superficie y  $dA_{im}$  la proyección  $dA_s$  de dentro del área del sensor. La relación entre ambas coincide con el ángulo sólido, cuyo vértice es el del foco principal de la lente, P, llegando a:

$$dA_s = \frac{dA_{im} \cos \gamma}{\cos \theta_r} \left( \frac{z}{f} \right)^2 \quad ( 3.23 )$$

$dA_{im}$  coincidirá con el área del elemento básico del sensor (pixel). Si  $dA_{im}$  es constante para un sensor dado,  $dA_s$  está determinado por su geometría y por el tamaño del pixel. Todos los rayos luminosos radiados por  $dA_s$ , que son incidentes dentro del área de la lente,  $dA_l$ , son proyectados dentro del área de la imagen,  $dA_{im}$ . Luego, el ángulo sólido de la radiación reflejada,  $d\omega_r$ , cuando es visto desde  $dA_s$  quedará como:

$$d\omega_r = \frac{dA_l \cos \gamma}{R_0^2} \quad ( 3.24 )$$

El flujo reflejado,  $d\Phi_r$ , es la energía de luz recibida por el área de la lente. Haciendo uso del vector complejo de Poynting,  $S$ , para definir el campo electromagnético descrito por una onda, se tiene:



**Figura 3.10 Relaciones geométricas del modelo de Beckmann-Spizzichino**

$$S = ExH \quad ( 3.25 )$$

donde E representa la intensidad del campo eléctrico (no confundir ahora con la iluminación, también llamada E) y H la intensidad del campo magnético. Siendo la parte real de S la que define el valor medio de energía emitida por unidad de área, cuya dimensión será vatio por metro cuadrado:

$$S_a = \text{Re}[S] = \frac{1}{2} \text{Re}[ExH] \quad ( 3.26 )$$

Y al estar relacionados ambos por la permitividad y la permeabilidad

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E \quad ( 3.27 )$$

el valor medio del flujo de energía por unidad de área está definido por

$$S_a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} |E|^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |H|^2 \quad ( 3.28 )$$

según Beckmann-Spizzichino, la energía media especular estimada,  $|\hat{E}|^2$ , originada por una fuente luminosa de longitud de onda  $\lambda$ , con ángulo de incidencia  $\theta_i$ , sobre una superficie rugosa de tamaño A, con distribución normal de alturas, media cero, varianza  $\sigma_h$  y distancia de correlación T que refleja en la dirección  $(\theta_r, \phi_r)$ , es:

$$|\hat{E}|^2 = \frac{E_{01}^2 A^2 \cos^2 \theta_i}{\lambda^2 R_0^2} e^{-g} \left( \rho_0^2 + \frac{\pi T^2 D^2}{A} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g^m}{m!m} e^{-v_{xy}^2 T^2 / 4m} \right) \quad ( 3.29 )$$

donde

$$\begin{aligned}
(v_x, v_y, v_z) &= k(\sin\theta_i - \sin\theta_r \cos\phi_r)x, +k(\sin\theta_r \sin\phi_r)y, -k(\cos\theta_i + \cos\theta_r)z \\
g &= \left( 2\pi \frac{\sigma_h}{\lambda} (\cos\theta_i + \cos\theta_r) \right)^2 \\
\rho_o &= \text{sinc}(v_x A_x) \text{sinc}(v_y A_y) \\
D &= \frac{1 + \cos\theta_i \cos\theta_r - \sin\theta_i \sin\theta_r \cos\phi_r}{\cos\theta_i (\cos\theta_i + \cos\theta_r)} \\
v_{xy} &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2}
\end{aligned} \tag{ 3.30 }$$

siendo  $E_{01}$  la amplitud del campo eléctrico y  $A_x$  y  $A_y$  denotan la superficie rectangular de  $A$ , evaluada en la integral de Helmholtz. El flujo radiado a partir de este modelo será:

$$d\Phi_r = S_a dA_l \cos\gamma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} |\hat{E}|^2 dA_l \cos\gamma \tag{ 3.31 }$$

introduciendo ( 3.23 ), ( 3.24 ) y ( 3.31 ), en la definición de radiación ( 3.3 ):

$$L_r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{R_0^2 f^2 |\hat{E}|^2}{z^2 dA_{im} \cos\gamma} \tag{ 3.32 }$$

No es posible determinar el valor exacto de la radiación desde el cálculo estimado de la energía especular. La radiación de la ecuación anterior es realmente el valor esperado de ésta, es decir,  $\hat{L}_r$ . En el modelo de Beckmann-Spizzichino, el valor medio de  $EE^*$  es determinado como la integral extendida en toda la superficie del objeto. Obsérvese que si la dimensión del pixel es conocida,  $dA_{im} = dA_{\text{pixel}}$ , y recibe la luz radiada de  $dA_S$ , entonces el valor esperado de la energía especular puede ser computado dentro del área  $A = dA_S$ . Si  $dA_{\text{pixel}}$  es conocido y constante,  $A$  es determinado por ( 3.23 ) Insertando de ( 3.23 ) a ( 3.32 ),  $\hat{L}_r$  es:

$$\hat{L}_r = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{E_{01}^2 \cos^2\theta_i}{2\lambda^2} e^{-g} \left( \left( \frac{z}{f} \right)^2 \frac{dA_{\text{pixel}} \cos\gamma}{\cos^2\theta_r} \rho_0^2 + \frac{\pi T^2 D^2}{\cos\theta_r} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g^m}{m!m} e^{-v_{xy}^2 T^2 / 4} \right) \tag{ 3.33 }$$

$L_r$  es la suma de dos componentes: el pico especular y el halo especular. En la última expresión se decanta que la componente pico especular es proporcional al área vista  $dA_S$ . Sin embargo, se puede demostrar que la integral de  $\rho_0^2$  es inversamente proporcional a  $dA_S$ . En otras palabras, aunque la magnitud del pico especular es proporcional a  $dA_S$ , la energía contenida en él es independiente de la cantidad de superficie.

Las expresiones de radiación para superficies rugosas y lisas, pueden ser determinadas desde las expresiones de energía especular obtenidas por Beckmann-Spizzichino, obteniéndose las siguientes formulaciones:

$$L_{r(lisas)} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{E_{0i}^2 \cos^2 \theta_i}{2\lambda^2} e^{-g} \left( \left( \frac{z}{f} \right)^2 \frac{dA_{pixel} \cos \gamma}{\cos^2 \theta_r} \rho_0^2 + \frac{\pi T^2 D^2 g}{\cos \theta_r} e^{-v_{xy}^2 T^2 / 4} \right) (g \ll 1)$$

$$L_{r(rugosas)} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{E_{0i}^2 \cos^2 \theta_i \pi T^2 D^2}{2\lambda^2 \cos \theta_r} \exp \left( \frac{-v_{xy}^2 T^2}{4v_z^2 \sigma_h^2} \right) (g \gg 1) \quad (3.34)$$

### 3.2.1.6 Modelos de reflexión para la inspección de superficies planas

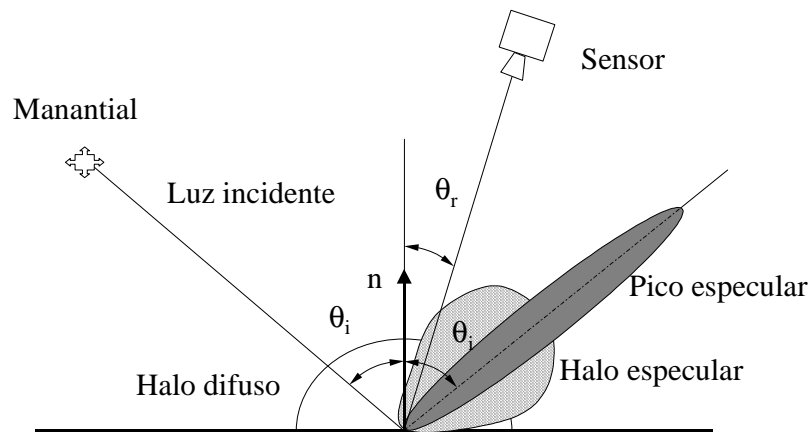
Los modelos de reflexión descritos son demasiado complicados de utilizar en Visión artificial. Diversos modelos aproximativos han sido propuestos por la comunidad científica.

Nayar, Ikeuchi y Kanade [Nayar91] han examinado los modelos de Torrence-Sparrow y de Beckmann-Spizzichino, de manera exhaustiva en simulación por computador. Ellos han encontrado que la solución para superficies rugosas, pueden ser aproximadas mediante funciones de densidades normales, y además las soluciones coinciden con los modelos de Torrence-Sparrow, bajo las condiciones expuestas. También han encontrado soluciones para superficies lisas aproximándolas a superficies rugosas mediante funciones deltas.

Para estas deducciones, han elaborado un modelo de tres componentes:

$$L_r(\theta_i, \theta_r, \phi_r) = C_b \cos \theta_i + \frac{C_{sl}}{\cos \theta_r} e^{(-\alpha^2 / 2\sigma_\alpha^2)} + C_{ss} \delta(\theta_i - \theta_r) \delta(\phi_r) \quad (3.35)$$

la primera componente corresponde con la reflexión difusa explicada por el modelo lambertiano. La segunda componente corresponde al halo especular, está relacionada con la segunda solución de Beckmann-Spizzichino y el modelo de Torrance-Sparrow. Y la tercera componente, referente al haz especular, corresponde a superficies lisas. La Figura 3.11 muestra un esquema del modelo.



**Figura 3.11 Modelo de Nayar**

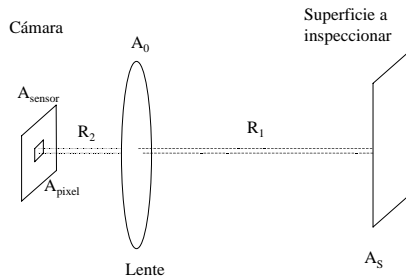
Las conclusiones de *Nayar et al*[Nayar91] pueden ser resumidas en los siguientes puntos:

- El modelo lambertiano puede ser usado para representar las componentes de halo difuso. Este modelo está siendo usado para el reconocimiento de formas desde sombras y en técnicas de fotometría estéreo. Los resultados indican buenas prestaciones.
- Los modelos de reflexión de Beckmann-Spizzichino predicen tanto la componente de halo especular como haz especular para superficies muy lisas ( $\sigma_h \ll \lambda$ ). La componente de haz especular domina respecto al halo, y la superficie se comporta como un espejo. En la medida de mayor rugosidad en la superficie, decrece la componente de haz y empieza a dominar el halo especular. Las dos componentes son simultáneamente significativas para un estrecho rango.

- El haz especular tiende a concentrarse, a medida que la superficie sea cada vez más lisa,  $\sigma_h / \lambda < 1.5$ , y/o bien cuando el halo especular se concentra debido a que la superficie es suavemente ondulada,  $\sigma_h / T < 0.025$ .
- El modelo de Torrence-Sparrow da una buena aproximación para la componente halo especular de Beckmann-Spizzichino. Ambos modelos son exitosos en la predicción del halo especular. Al ser más simple de implementar el modelo de Torrence-Sparrow, éste debe ser empleado para representar la componente halo especular.
- El modelo de Torrence-Sparrow no es capaz de describir el comportamiento especular en superficies lisas, luego imposibilita utilizarlo para simular el haz especular.
- Aunque los dos modelos parten de diferentes supuestos, sus parámetros rugosos,  $\sigma_h$  y  $\sigma_\alpha$ , se encuentran relacionados por comparación de las ecuaciones que describen el comportamiento del halo especular.

Estas conclusiones permitirán deducir cual de los modelos explicados debe utilizarse dependiendo de las características de las superficies a inspeccionar.

### 3.2.2 Modelo de la cámara



Si el sistema de adquisición de imágenes, lente más cámara (ver Figura 3.12), se encuentra a una distancia de  $R_1$ , desde la superficie de inspección, el número de fotones incidentes dentro del sistema óptico, de área  $A_0$  y durante el tiempo de integración,  $t_i$ , es de:

$$n_{lente} = L_r \frac{A_0}{R_1^2} A_s \tau_A t_i \quad (3.36)$$

**Figura 3.12 Modelo de camara**

donde  $L_r$  es la radición refleja en la dirección del sensor y  $\tau_A$  es el coeficiente de transmisión atmosférica. El número de fotones que alcanza el sensor será:

$$n_{sensor} = L_r \frac{A_0}{R_2^2} A_s \tau_A \tau_O t_i \quad (3.37)$$

$\tau_O$  es la transmitancia del sistema óptico. Y el número de fotones incidentes en un pixel, es una relación de áreas:

$$n_{pixel} = n_{sen\ sor} \frac{A_{pixel}}{A_{sen\ sor}} \quad ( 3.38 )$$

usando la aproximación de ángulo pequeño para rayos axiales:

$$\frac{A_s}{A_{sen\ sor}} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \quad ( 3.39 )$$

e introduciendo los conceptos de magnificación óptica,  $M_O$ , que es la relación entre  $R_2/R_1$ . Además, éstas están relacionadas con la distancia focal efectiva de la lente, luego:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{f} \quad ( 3.40 )$$

el número de fotones que recibe el pixel será:

$$n_{pixel} = L_r \frac{A_0 A_{pixel}}{f^2 (1 + M_0)^2} \tau_A \tau_O t_I \quad ( 3.41 )$$

asumiendo una apertura circular e introduciendo el concepto de F - número, como la relación entre  $f/D$ , siendo D el diámetro de la óptica, quedará:

$$n_{pixel} = \frac{\pi}{4} \frac{L_r A_{pixel}}{F^2 (1 + M_0)^2} \tau_A \tau_O t_I \quad ( 3.42 )$$

Todas las variables son función de la longitud de onda y de la energía de los fotones, y a su vez de la temperatura del foco luminoso. Por último, el número de fotoelectrones generados en un detector de estado sólido es:

$$\begin{aligned} n_{pe} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} R_r(\lambda) n_{pixel}(\lambda, T_{lum}) d\lambda \\ n_{pe} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} R_r(\lambda) \frac{\pi}{4} \frac{L_r(\lambda, T_{lum}) A_{pixel}}{F^2 (1 + M_0)^2} \tau_A(\lambda) \tau_O(\lambda) t_I d\lambda \end{aligned} \quad ( 3.43 )$$

siendo  $R(\lambda)$  la respuesta espectral del detector ante la luz.



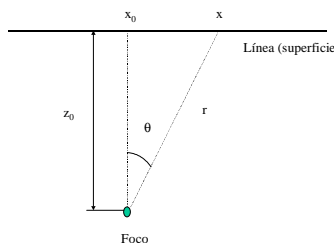
### 3.3 Modelos de fuentes luminosas e iluminación uniforme en superficies planas

La iluminación uniforme de las superficies planas a inspeccionar es un requerimiento frecuente en los SIVA. En gran medida, porque facilita el procesamiento de la imagen adquirida, con lo que se disminuye el número de operaciones a realizar, llegando a abaratar los costes del soporte físico (HW) y/o el tiempo computacional en el análisis de imágenes. Los siguientes párrafos tienen como objetivo, mostrar un método de diseño para la óptima colocación del sistema luminoso, tal que consiga como efecto una distribución uniforme de luz en el campo visual.

El primer paso es intentar modelar la iluminación producida por las fuentes de luz tipo áreas, líneas, puntos y coronas, así como combinaciones de ellas. Una vez conocidas las funciones de comportamientos, es posible investigar los efectos de la selección del tipo de iluminación y su lugar más apropiado.

Se considera que las superficies planas son iluminadas por fuentes monocromáticas e incoherentes, de cuatro tipos: primera, fuentes de área infinita, segunda, fuentes de luz uniforme lineal de anchura infinitesimal y longitud infinita, tercera, puntos infinitesimales de luz uniforme y cuarta, coronas de luz de ancho infinitesimal y radio finito. Las implicaciones de utilizar estos modelos simples para representar el comportamiento real del sistema de iluminación, han sido discutidos por *Gennert et al*[Genne93] y van a ser también tratados en esta tesis. Considerando un número de modelos de fuentes, del mismo tipo o diferentes, tal que representen el sistema de iluminación, la función de iluminación  $E(x,y)$  evaluará la iluminación total en el punto arbitrario  $(x,y)$  de la superficie a inspeccionar. Sin pérdida de generalidad, se selecciona un sistema de coordenadas, en el cual el eje  $z$  es normal a la superficie. La orientación de los ejes  $x$ - $y$  con el plano de inspección será coplanar y arbitrario, seleccionándose de la forma que mejor convenga.

Al utilizar luz incoherente, la iluminación sobre la superficie es la suma algebraica de las  $n$  contribuciones de las distintas fuentes luminosas



$$E(x, y) = \sum_{k=1}^n I_k E'_k(x, y) \quad (3.44)$$

**Figura 3.13 Modelo 2D para iluminación**

donde  $I_k$  y  $E'_k$  representan la intensidad lumínica y la disposición geométrica del  $k$  foco. El aspecto cuantitativo de  $I_k$  depende de la naturaleza del foco, pero ésta no es importante en la determinación de la uniformidad, excepto en lo que se refiere a la contribución relativa desde una iluminación de múltiples focos. Esta notación permite utilizar una función que separa la potencia luminosa,  $I_k$ , de la colocación geométrica foco – superficie,  $E'_k(x,y)$ .

Para entender  $E'_k(x,y)$ , se hace el estudio en un espacio 2D con el fin de facilitar la explicación (Figura 3.13). La iluminación alcanzará su máximo, justo en la normal de la línea (plano) que pasa por el foco,

$$E(x_0) = I \frac{1}{z_0^2} = IE'(x_0) \quad (3.45)$$

mientras la intensidad en un punto arbitrario,  $x$ , será:

$$E(x) = \frac{I \cos \theta}{r^2} = I \frac{\frac{z_0}{r}}{r^2} = I \frac{z_0}{\left((x-x_0)^2 + z_0^2\right)^{3/2}} = IE'(x) \quad (3.46)$$

de lo que se desprende que  $E'(x)$  sólo dependerá de la coordenada del punto en la superficie y de la localización de la fuente. Por último, como lo que se trata es de ver las irregularidades del flujo radiado sobre la superficie, la expresión puede normalizarse de 0 a 1 por cada contribución del foco, al relativizarlo respecto a su valor máximo,

$$E^*(x) = \frac{E'(x)}{E'(x_0)} \quad (3.47)$$

$E^*$  se llama la iluminación normalizada, que para el ejemplo utilizado será:

$$E^*(x) = \frac{I \frac{z_0}{r^3}}{I \frac{1}{z_0}} = \frac{z_0^3}{\left((x-x_0)^2 + z_0^2\right)^{3/2}} \quad (3.48)$$

Por tanto, se desprende que el comportamiento del sistema luminoso depende de la colocación de los focos respecto a la superficie plana a inspeccionar, siendo necesario determinar la contribución de cada fuente. La prestación definitiva es la suma ponderada de cada manantial luminoso, por lo que se pasa a estudiar las funciones de iluminación de cada tipo de fuente.

### 3.3.1.1 Foco tipo área

Una fuente uniforme de tipo área (figura 3.15), de extensión infinita y localizada paralelamente a la superficie plana a inspeccionar, produce una iluminación normalizada

$$E^*(x, y) = 1$$

( 3.49 )

es fácilmente entendible al suponer que el área está constituido por infinitos puntos luminosos y la aportación luminosa en cada punto a de la superficie será la misma.

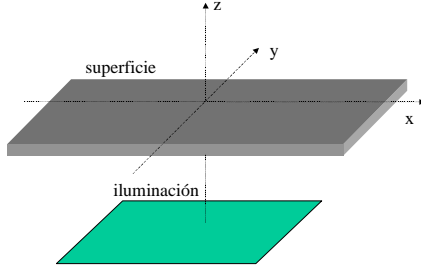


Figura 3.15 Foco tipo área

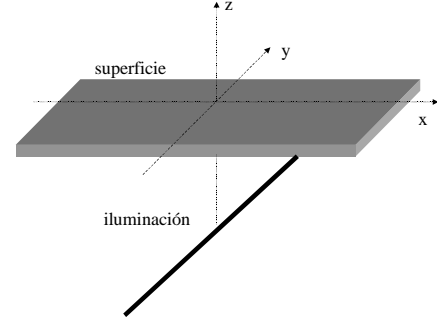


Figura 3.14 Foco tipo línea

### 3.3.1.2 Foco tipo línea

La fuente línea (figura 3.14), infinitesimal en diámetro, infinita en extensión y localizada paralela al plano de referencia, tendrá una función normalizada de iluminación

$$E^*(x, y) = \frac{z_0^3}{\left((x - x_0)^2 + z_0^2\right)^{3/2}} \quad ( 3.50 )$$

donde  $x_0$  y  $z_0$  son las distancia entre el origen de coordenadas y el foco. Por conveniencia matemática, el eje  $y$  ha sido elegido paralelo a la fuente de iluminación. La deducción de la expresión es similar a la empleada en el modelo 2D.

### 3.3.1.3 Foco tipo punto

El manantial punto, infinitesimal en extensión y localizado en el punto P con coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$ , figura 3.16, la función de luminosidad respecto a la superficie es:

$$E^*(x, y) = \frac{z_0^3}{\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2\right)^{3/2}} \quad ( 3.51 )$$

### 3.3.1.4 Foco tipo corona

Esta fuente de ancho infinitesimal y de radio finito de valor  $R$ , figura 3.17, situada en un plano paralelo a la referencia y a una altura  $z_0$ , produce una iluminación [Genne94]:

$$E(r) = \frac{2(R^2 + z_0^2)^{3/2}}{\pi(R^2 + z_0^2 + r^2 - 2Rr)(R^2 + z_0^2 + r^2 + 2Rr)^{1/2}} e(\sqrt{m}) \quad (3.52)$$

donde

$$\begin{aligned} r &= (x^2 + y^2)^{1/2} \\ m &= \frac{4Rr}{R^2 + z_0^2 + r^2 + 2Rr} \\ e(\sqrt{m}) &= \int_0^{\sqrt{m}} \sqrt{1 - m \sin^2 \theta} d\theta \end{aligned} \quad (3.53)$$

obsérvese de la expresión ( 3.52 ) que se tiene una iluminación de isoluxes en forma circular.

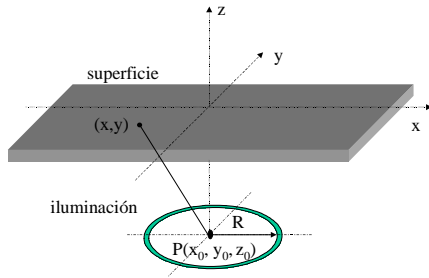


Figura 3.17 Foco tipo corona

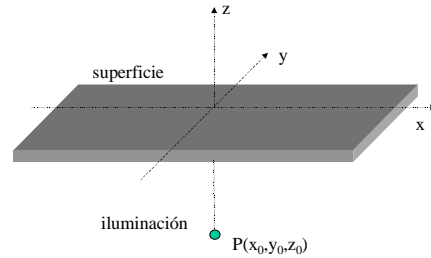


Figura 3.16 Foco tipo punto

### 3.3.1.5 Iluminación óptima uniforme

En general, la iluminación total  $E(x, y)$  sobre la superficie debe ser optimizada, tal que la adicción de contribuciones esté relacionada con el propósito de realce visual de la escena. Asumiendo que la función  $E(x, y)$  es analítica y conocida, un supuesto válido al haber modelado las fuentes de iluminación, esta expresión puede ser desarrollada en series

de Taylor alrededor del plano referencia. Para un punto cerca del origen,  $(\Delta x, \Delta y)$ , la iluminación total será:

$$E(\Delta x, \Delta y) = E(x_0, y_0) + \frac{\partial E}{\partial x}_{x=x_0} \Delta x + \frac{\partial E}{\partial y}_{y=y_0} \Delta y + \dots \quad (3.54)$$

luego el criterio para optimizar, en el sentido de tener iluminación uniforme, es hacer lo posible para eliminar todos los términos del desarrollo de Taylor, excepto el de orden cero. Dependiendo de la expresión de  $E(x, y)$  podrá diseñarse el sistema para la óptima iluminación uniforme de la escena SIVA. Por lo que se presenta a continuación cómo se han empleado los modelos de focos y superficies para el diseño de los sistemas de iluminación para los dos SIVA implementados en el transcurso de esta tesis.

### 3.4 Sistema de iluminación para los SIVA implementados

---

En la construcción de los dos SIVA implementados en el transcurso de esta tesis, hay dos problemas diferentes en el diseño del sistema de iluminación: el primero es obtener una fuente luminosa que sea capaz de iluminar uniformemente el escenario SIVA, y el segundo, es determinar la localización del foco y la cámara respecto a la superficie. De ambos problemas se trata a continuación, aunque sólo se aborda en su totalidad el sistema de iluminación para la inspección de la pasta de papel, pues el dedicado para el aluminio ya ha sido tratado por Fernández [Fernán97]. De la citada motivación, se pretende conseguir un modelo para la simulación, de manera que con él se pueda decidir la forma y localización óptima de las fuentes luminosas. Con tal propósito se va a desgranar el método empleado, basado en el diseño de sistemas de iluminación uniforme y en el estudio de las propiedades de reflexión en la superficie a inspeccionar.

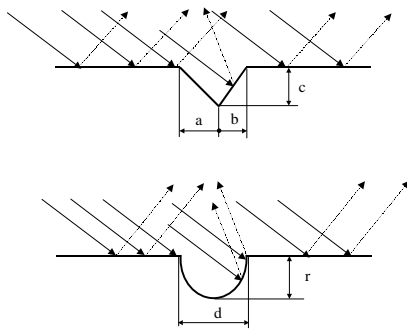
#### 3.4.1 Metodología a emplear para el diseño del sistema de iluminación

Hay dos aspectos distintos a resolver, el primero es la construcción de las fuentes luminosas que sean capaces de dar una iluminación uniforme en la escena SIVA y el segundo es la localización del binomio fuente luminosa – cámara, capaz de realzar los defectos superficiales. Para la construcción del sistema de iluminación uniforme se utilizará los modelos de fuentes luminosas y se aplicará el desarrollo de Taylor en la iluminación recibida, con el objeto de eliminar todos los términos excepto el correspondiente al orden cero, consiguiendo el objetivo de iluminación uniforme. Este método podrá verse con todo detalle en el diseño de las fuentes luminosas para la pasta de papel.

Una vez obtenido el sistema de iluminación uniforme se pasará al estudio sobre el comportamiento de la superficie ante la luz, empezando con la respuesta espectral de la luz. Así la respuesta espectral de un sensor CCD difiere significativamente del ojo humano. El ojo humano es más sensible en la longitud de onda de alrededor de los 500 nm,

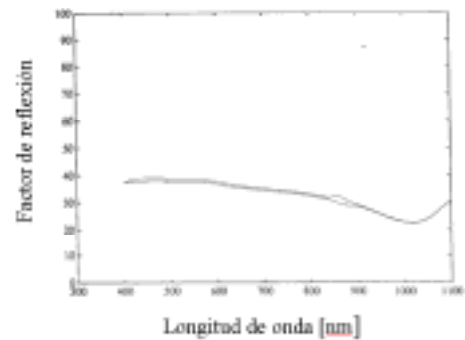
correspondiente a la zona del espectro del verde y amarillo. En cambio un CCD es más sensible al rojo, el rango espectral típico va desde los 300 a los 1200nm, por lo que el primer paso a efectuar es estudiar la reflexión del material en la región visible del CCD mediante algún espectrógrafo. El objetivo es encontrar, si hubiera, alguna región del espectro de la luz que tuviera un efecto dominante en el contraste de los defectos. Este fenómeno es aplicado cuando los defectos tienen un color específico o en materiales con componentes de reflexión difusos, por ejemplo en inspección de textiles o de madera. Sin embargo hay otros materiales como el acero, cuyas propiedades de reflexión muestran uniformidad en el rango visible del sensor. Para los materiales tratados hay que decir que este experimento no se ha efectuado para el aluminio colado, pero si se ha hecho para la pasta de papel, más concretamente se ha buscado la región del espectro que aumente el contraste de un tipo de defectos llamados *shive* ( ver 7.2 ). No obstante, para el caso del aluminio se ha supuesto que el antecedente del acero puede utilizarse para considerar uniformidad de comportamiento de las propiedades de reflexión en el rango espectral del CCD (ver figura 3.19).

De otro lado se encuentra el dato sobre la rugosidad de la superficie. Así por ejemplo, para el caso del aluminio, su rugosidad va desde los 50  $\mu\text{m}$  a los 75  $\mu\text{m}$ , dependiendo del tipo de acabado superficial ( ver 7.1 ). Esta información es extraordinariamente valiosa, primero porque según las conclusiones de Nayar (3.2.1.6), esta superficie es clasificada de tipo rugosa y no lisa, lo que implica que la componente de luz reflejada es un halo especular y no un pico especular. Además, también se concluye que el modelo óptimo a implementar es el de Torrence-Sparrow, lo que permitirá simular el



**Figura 3.18 Modelos geométricos de los defectos**

las diferentes posiciones espaciales, cuya función objetivo es la maximización del realce visual.

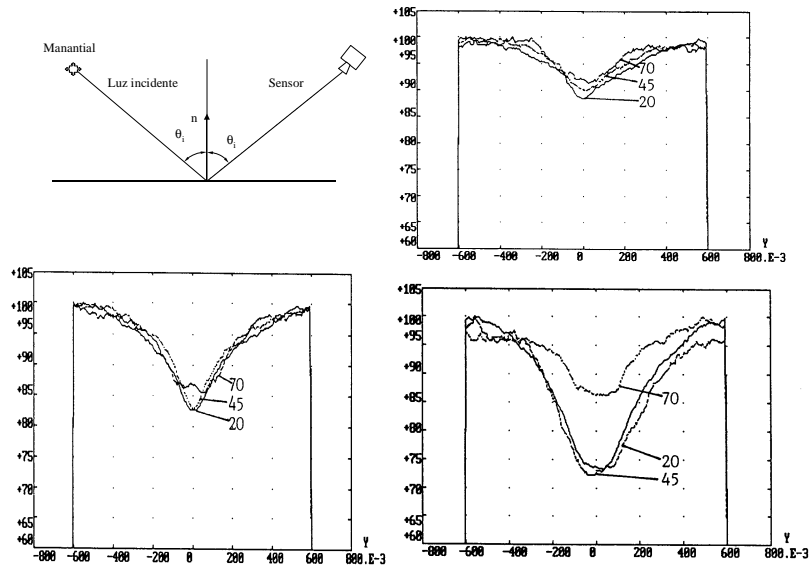


**Figura 3.19 Reflexión de la luz en el acero en el rango de los 400 a 1100nm [Miett93]**

comportamiento de la radiación reflejada de material no defectuoso, dependiendo tanto de la posición del manantial luminoso como del sensor respecto a la superficie.

Sólo resta para iniciar la simulación, la modelización de los defectos. Éstos pueden ser simplificados mediante geometrías sencillas, por ejemplo como las indicadas en la figura 3.18, cuyas dimensiones serán dadas mediante un análisis superficial de los defectos. Todo ello permitirá localizar la óptima posición de los focos y los sensores mediante la simulación en

Esta metodología propuesta por *Miettinen et al*[Miett93], puede ser contemplada para el caso del acero, en el que se ha procedido a modelar la superficie mediante el modelo de Phong, y se han considerado tres ángulos de incidencia, 20°, 45° y 70°, concluyendo que el mejor ángulo para el realce es el de 45°.



**Figura 3.20** a) Modelo empleado b) simulación de arañazo c) simulación de falta de material d) simulación de rugosidad local

### 3.4.2 Sistema de Iluminación para la inspección del papel

Se pretende construir un sistema de iluminación para la inspección de pasta de papel según la norma ENCE 404. Dicha normativa marca cómo debe iluminarse la pasta de papel para la localización de defectos locales. El sistema empleado se basa en la exposición de los pliegos de papel ante una iluminación de luz transmitida, esto es, el papel se deposita entre la fuente luminosa y el inspector humano. La información lumínica recibida por el ojo humano será utilizada para la localización de las faltas. Una descripción más detallada sobre este método podrá ser obtenida en el capítulo 7.

Para el proceso de automatización de las tareas de inspección visual, lo primero a realizar será el diseño del sistema de iluminación. No necesariamente, el sistema de iluminación utilizado por el inspector humano puede ser empleado por el SIVA, por las razones ya esgrimidas en el anterior capítulo. El operario puede considerar cambios de posición para tomar puntos de vistas complementarios, o por otro lado sombras generadas por la luz ambiental no hacen cambiar la opinión del operario pero puede perjudicar enormemente la decisión del SIVA. Sin embargo, la experiencia acumulada por parte del inspector y sus conclusiones, pueden dar una gran cantidad de pistas iniciales sobre cómo

puede estar constituido el sistema de iluminación para el SIVA y cuáles deben ser sus características esenciales para la formación de la imagen.

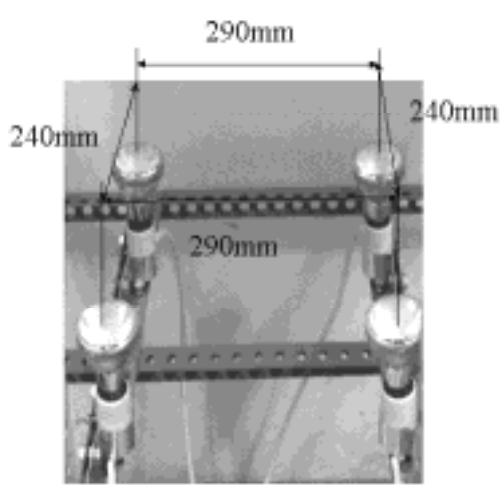
Pues bien, la primera característica del sistema de iluminación para este SIVA debe ser que tiene que fundamentarse en iluminación transmitida. Además por la arquitectura que va a ser presentada, la superficie de inspección se ha dividido en cuatro regiones complementarias, con el motivo de disminuir los tiempos de inspección por cada pliego de papel. Su argumentación será dada en el capítulo 7. Esta matización implica que en vez de un único escenario SIVA, se va a tener cuatro escenarios independientes pero complementarios. Por lo que cada escenario estará constituido por un foco luminoso, un trozo de superficie a inspeccionar y una cámara. De forma que los cuatro escenarios, adyacentes entre sí, cubran en su totalidad la superficie a inspeccionar que marca la norma.

Una vez definidos los requisitos básicos, se plantea a continuación cuáles deben ser los objetivos del sistema de iluminación. Como se ha comentado en este capítulo, el sistema de iluminación intentará trivializar todo lo posible el análisis de las imágenes. Atendiendo a esta premisa, se pretenderá que la información luminosa que le llega al plano sensor de la cámara sea debida exclusivamente a la textura de la superficie. Además deberá exigirse que los datos captados por la cámara tengan la suficiente capacidad como para poder discernir qué es defecto y qué no lo es. Para poder cumplir con el primer objetivo, será necesario que la iluminación sobre la superficie a inspeccionar sea uniforme en el campo visual de la cámara. Y en cuanto al segundo requisito, habrá de buscar el foco luminoso que tenga la conveniente potencia lumínica como para poder captar los suficientes fotones recibidos por el sensor durante el tiempo de integración de la cámara.

El primer objetivo va a depender de la disposición física de los elementos del escenario SIVA, esto es, se va a tratar sobre la localización óptima del foco, la superficie y la cámara. En cuanto al segundo punto, resulta un problema de la elección de la tecnología a emplear tanto del tipo de foco como de cámara. Por lo que se abordará en estos momentos la ubicación correcta de los elementos, sin entrar en cuáles deberían ser sus características técnicas, de las que serán comentadas en el mencionado capítulo 7.

#### 3.4.2.1 Disposición óptima de los focos luminosos respecto a la superficie a inspeccionar

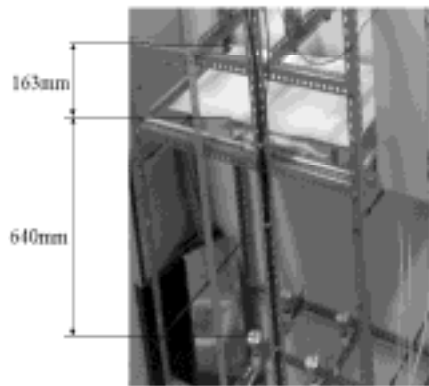
Debido al tamaño de los defectos a localizar y al tipo de sensor empleado, el escenario SIVA tiene una dimensión de 73 mm por 48 mm. Esta superficie es la captada por la cámara cada vez que toma una imagen, su justificación viene avalada por las dimensiones de las faltas y por el tipo de arquitectura de sensores empleados (ver 3.5.2). Por ese motivo se hizo uso de focos luminosos puntuales, capaces tecnológicamente



**Figura 3.21 Disposición geométrica de los focos**



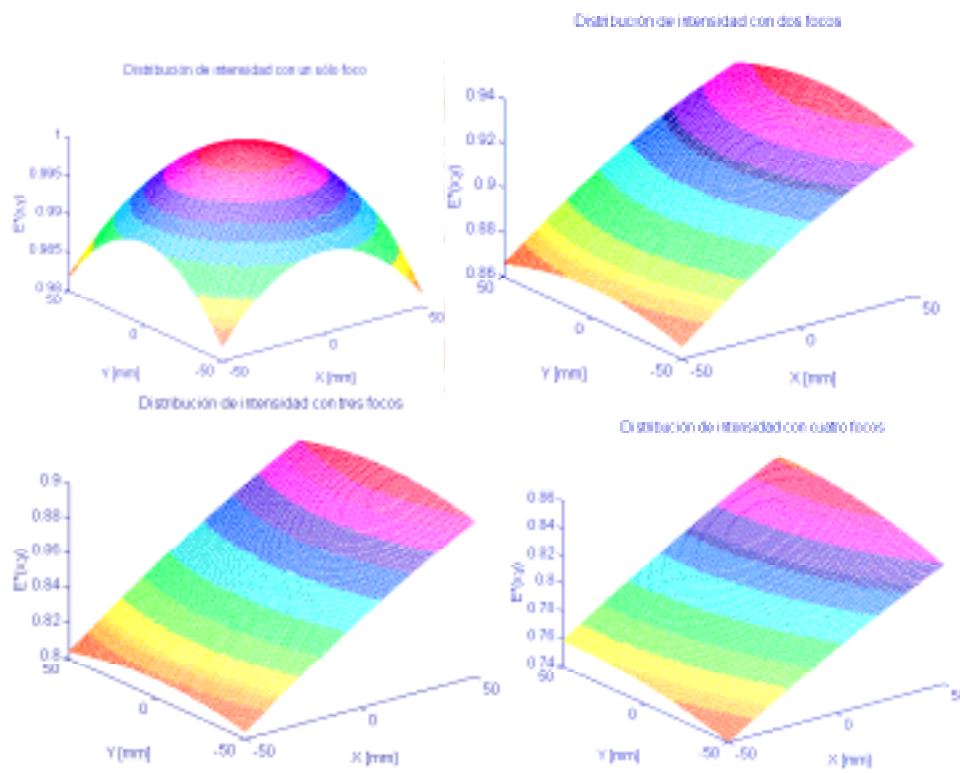
de mantener una iluminación cuasi uniforme en esta superficie. De otro lado, por las estrategias de inspección sobre el pliego de pasta de papel, los susodichos focos están separados de entre sí 292 mm y 240 mm ( ver figura 3.21 ). Además, se tiene que las fuentes de luz están situadas en el mismo eje que las cámaras (transversal al papel), con la intención de aprovechar al máximo la uniformidad del foco puntual y su máxima potencia. En la figura 3.21 se muestra las disposiciones mencionadas y las separaciones entre los



**Figura 3.22 Distancia entre focos, superficie y cámaras**

focos, la superficie y las cámaras. De esta manera, se ha hecho una descripción del modelo de iluminación empleado, el cual podrá ser simulado mediante las expresiones vistas en 3.3. Para una variación de uniformidad de luz de un 2% en el escenario SIVA, según el modelo expresado en ( 3.51 ), el foco deberá estar situado a una distancia de 640 mm respecto al papel. La figura 3.23 muestra los resultados de la simulación de la radiación incidente en el área de inspección. Los resultados de la simulación muestran que la iluminación con un solo foco es totalmente satisfactoria, pero que existen acoplamientos lumínicos como consecuencia de la proximidad existente entre ellos, eliminando la propiedad de uniformidad en la radiación luminosa incidente en la superficie del papel. Por lo que obligará a

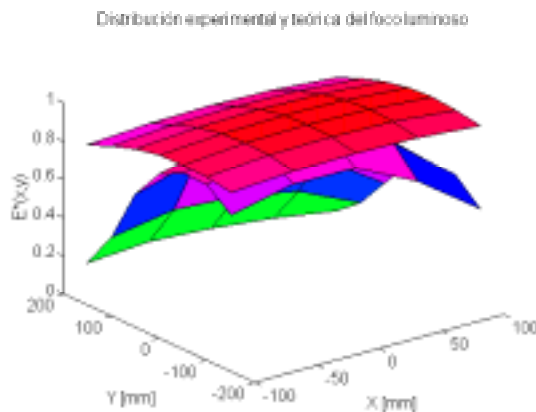
buscar algún remedio que evite las interferencias entre los diferentes focos. El método empleado consiste en insertar cuerpos negros con el objeto de evitar la conexión entre focos, a la vez que se disminuya todo lo posible la radiación reflejada de estos cuerpos. Pero antes de entrar en su análisis, se van a contrastar los resultados de la simulación con las observaciones experimentales.



**Figura 3.23** Distribución de la radiación luminosa en un área de inspección considerando: a) un solo foco, b) con dos focos, situado el segundo a 240 mm en Y, c) tres focos, con el tercero situado a 292 mm en X y d) con cuatro focos, con el último a 292 mm de X y 240 mm de Y

### 3.4.2.2 Validación de los modelos de focos luminosos puntuales

Se pretende verificar que los modelos empleados y descritos en 3.3 se corresponden con los valores experimentales tomados. A tal fin, se ha hecho una plantilla de acetato cuadriculado con celdas de 50 mm x 50 mm y han sido tomadas medidas con un luxómetro. Éste fue ubicado en la superficie de inspección, con el objeto de medir la radiación recibida por uno, dos, tres y cuatro focos. Los resultados obtenidos si bien mantenían similares tendencias, sus valores no correspondían con los obtenidos por la simulación (ver figura 3.24). Esta conclusión era de esperar, pues el foco utilizado es muy direccional, así su ángulo de apertura máximo es de 30°. Recuérdese que en el modelo de foco puntual, éste radiaba por igual en todas las direcciones. Además físicamente no es una fuente puntual, sino una superficie luminosa circular de 50 mm de diámetro, tal como se puede contemplar en la figura 3.21.



**Figura 3.24** Distribución teórica y experimental sobre la superficie de inspección

Ante el fracaso del mencionado modelo para recrear de forma teórica los resultados experimentales, se pensó en nuevas alternativas. Para ello, véase en que se aparta la realidad del modelo ideal. En primer lugar se ha considerado que la fuente de luz es un punto luminoso, sin dimensiones espaciales, lo cual no es así: el chorro de luz procede una superficie finita, lo que sugiere emplear una composición de focos puntuales distribuidos homogéneamente en la superficie luminosa. Por otro lado, la luz no es proyectada por igual en todas las direcciones del espacio, sino que existe un cono de proyección predominante. Los rayos del foco son tanto más débiles cuanto más se alejan de su normal. Podría

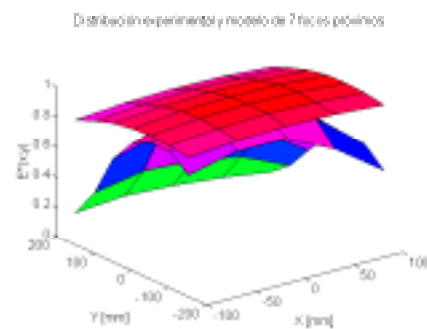
pensarse en ponderar la función de luminosidad mediante una función del tipo  $\cos^n \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo que forma el foco y el punto a estudiar de la superficie. En la función propuesta, independientemente del valor de  $n$  está acotada entre los valores de 0 y 1, aun más, para  $\theta = 0^\circ$  vale 1 y 0 para  $\theta = \pi/2$ , para cualquier valor de  $n$ . El valor de  $n$  determina la forma que toma la distribución: cuanto más se aleje de 0, más cóncava será la curva.

### 3.4.2.3 Modelo de puntos luminosos distribuidos

Cada foco no es exactamente un punto infinitesimal desde el cual se proyecta toda la luz, sino que presenta una cierta superficie sobre la cual se distribuye el total de la emisión de luz. Esta superficie podría simularse mediante una fuente luminosa plana, que considera que cada punto emite una cantidad infinitesimal de luz, con lo cual la



**Figura 3.26** Modelos basados en cargas puntuales distribuidas



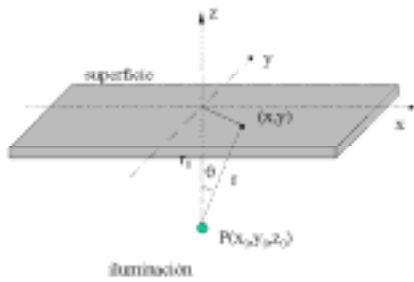
**Figura 3.25** Comparación entre los resultados experimentales y un modelo de 7 focos

iluminación total se obtiene integrando el valor de la intensidad luminosa por unidad de superficie sobre el área de foco. Una forma de aproximarse a este modelo consiste en sustituir un solo punto luminoso en varios distribuidos sobre el área del foco. Así, se han

calculado los resultados de aplicar esta teoría para dos, cinco y siete puntos luminosos distribuidos según muestra la figura 3.26.

A cada punto luminoso le corresponde una fuente cuya intensidad es igual al resultado de dividir la intensidad total por el número de puntos luminosos usados en la distribución. Los resultados obtenidos son decepcionantes, ya que apenas hay diferencia con la simulación de aplicar un solo punto luminoso. La debilidad de los resultados viene motivada por no considerar sus direcciones privilegiadas de radiación, al haber repartido los focos homogéneamente en la superficie de radiación.

#### 3.4.2.4 Modelo mediante función ponderación



**Figura 3.27 Geometría entre foco y superficie**

Como se ha comentado anteriormente, una forma de reproducir la caída tan fuerte de la luminosidad conforme se aleja del eje de máxima radiación del foco es utilizar funciones que tiendan a 0 para ángulos cercanos a los 90°. Las funciones más triviales que cumplen esta característica son el conjunto de  $\cos^n \theta$ . Al tener un parámetro indeterminado, permite tener un grado de libertad capaz de elegir aquél que más se aproxime la curva real con la teórica. Para elegir dicho valor se ha utilizado una función de coste basada en el sumatorio de las distancias entre la curva real y la teórica. Y a esta función se ha

buscado el mínimo, determinando el valor de n. El algoritmo queda así establecido:

$$\min \left( J = \sum_{i=1}^m \left( E_{P,i}^*(x, y) - E_{T,i}^*(x, y) \right)^2 \right)$$

$$E_{T,i}^*(x, y) = \frac{r_0^2 \cos^n \theta}{r^2} = \frac{r_0^{2+n}}{r^{2+n}} \quad (3.55)$$

donde m es el número de muestras tomadas, mientras  $E_{P,i}^*(x, y)$  y  $E_{T,i}^*(x, y)$  son las intensidades normalizadas experimentales y teóricas, para un punto (x, y), situado en el plano de inspección. Derivando respecto de n e igualando a cero quedará:

$$\frac{\partial}{\partial n} \sum_{i=1}^m \left( E_{P,i}^*(x, y) - E_{T,i}^*(x, y) \right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\left( \sum_{i=1}^m \left( \left( E_{P,i}^*(x, y) - E_{T,i}^*(x, y) \right) \frac{\partial E_{T,i}^*(x, y)}{\partial n} \right) \right) = 0 \quad (3.56)$$

Introduciendo la derivada en esta ecuación se podrá despejar el valor de n, quedando:

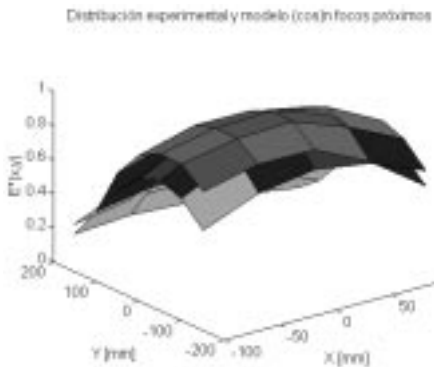
$$\left( \sum_{i=1}^m \left( E_{P,i}^*(x, y) - \frac{r_0^{2+n}}{r^{2+n}} \left( \frac{r_0^{2+n}}{r^{2+n}} \log \left( \frac{r_0}{r} \right) \right) \right) \right) = 0 \quad (3.57)$$

Se ha aplicado este algoritmo a las distintas mediciones experimentales, esto es, considerando la influencia de uno, dos, tres y cuatro focos sobre el escenario SIVA, según la disposición vista en 3.4.2.1, arrojando los siguientes resultados:

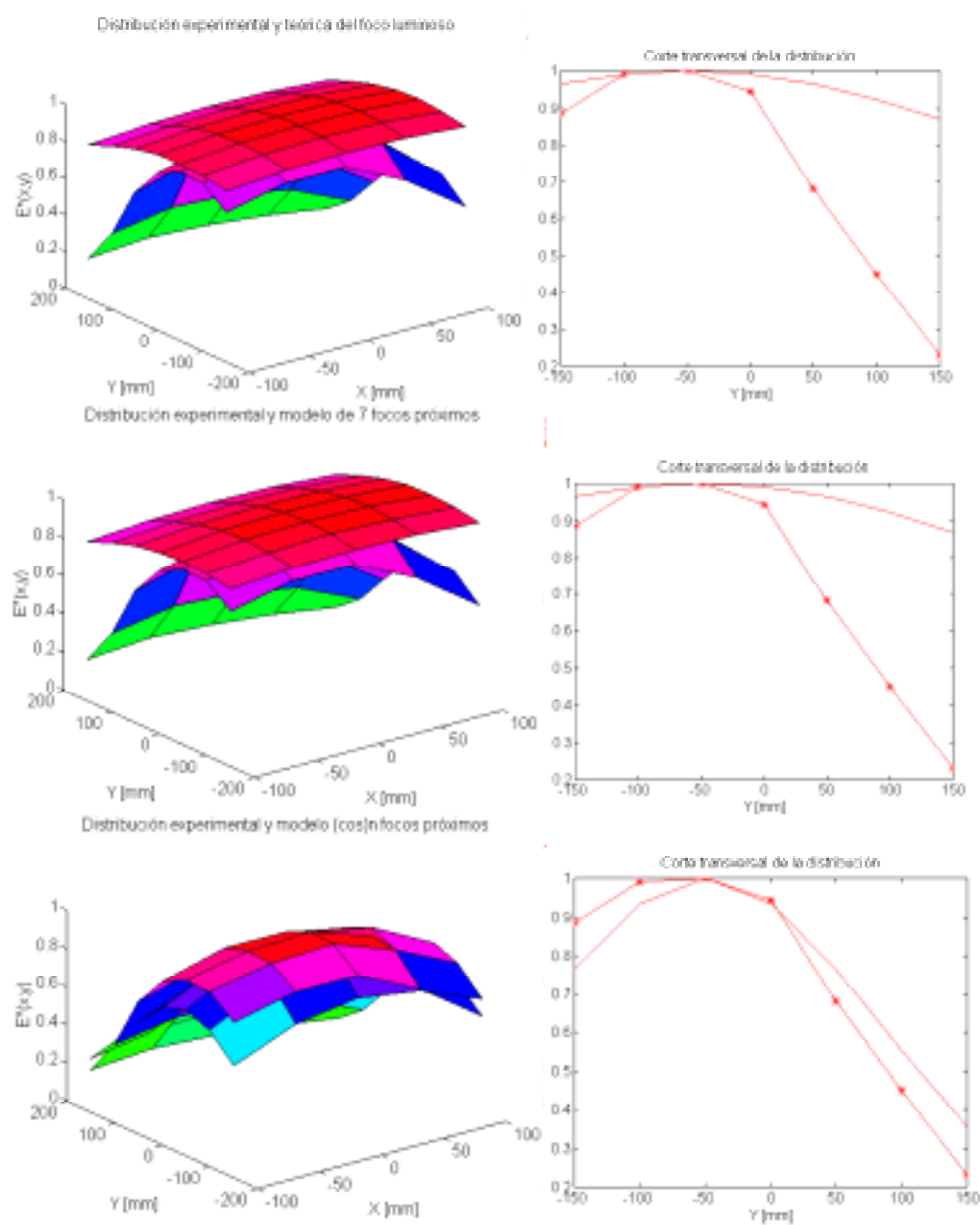
**Tabla 3.2 Valores de n para las distintas pruebas experimentales**

Número focos	N
1	22,19
2	19,92
3	20,05
4	19,93

Mostrando que el valor de n es sólido y que sólo depende de la naturaleza del foco utilizado. Obsérvese que para  $n = 20$ , el modelo teórico se ajusta bien al caso real ( ver figura 3.28). Por último, para aclarar lo expuesto se muestra un resumen de las distribuciones lumínicas y un corte transversal en el eje y para apreciar mejor las diferencias. Para mayores detalles sobre los experimentos ver el trabajo de García [García98].



**Figura 3.28 Comparación entre los valores experimentales y el modelo de  $\cos^n \theta$**



**Figura 3.29** Diferencias entre los resultados experimentales y los obtenidos con los diferentes modelos

### 3.4.2.5 Diseño de las pantallas lumínicas

Habiendo conseguido un modelo analítico sobre la radiación lumínica del foco, y mostrándose la imposibilidad de iluminación uniforme en el escenario SIVA a consecuencia del acoplamiento entre los focos, se pasa al diseño de cuerpos negros capaces de individualizar cada escenario para obtener una iluminación cuasi-uniforme.

Se trata a continuación sobre cuál debe ser la geometría y ubicación de los cuerpos negros. Es evidente que la colocación de los focos en el espacio, limita extraordinariamente las posibilidades tanto geométricas como de localización espacial de los cuerpos. De otro lado, no existe físicamente el concepto de cuerpo negro en el sentido de que toda la radiación incidente sobre él sea totalmente absorbida. Todo ello conduce a que se deberían emplazar las pantallas lumínicas lo más alejado posible del foco, con el objeto de disminuir la radiación de reflexión de las pantallas en el escenario de inspección. Pero las distancias entre las fuentes luminosas no permiten ubicaciones de las pantallas muy alejadas. Aun más, la separación de los focos imponen las distancias máximas a las que pueden estar puestas las pantallas, siendo justamente la mitad de distancia entre focos, esto es, 145 y 120 mm respectivamente. En cuanto a su geometría y a su facilidad constructiva, podría pensarse o bien en un cilindro o bien en un paralelepípedo. El inconveniente de cilindro es su radio, éste como máximo podría ser de 120 mm, pues de mayor tamaño interseccionaría con cilindros adjuntos. Luego por cuestiones de radiación reflejada y de diseño mecánico, la solución es el paralelepípedo.

El tamaño del paralelepípedo y su exacta ubicación debe cumplir con el doble objetivo de desacoplar las interferencias entre focos y minimizar el efecto de radiación reflejada en el escenario. El primer objetivo se consigue con la colocación de cuerpos opacos negros. Desde el punto de vista constructivo se han diseñado paralelepípedos de aluminio revestido, o bien con pintura negra mate o bien con aironfix<sup>2</sup> de terciopelo negro. En cuanto al segundo objetivo, se ha tratado de determinar sus dimensiones tal que se minimice el efecto de radiación reflejada. Con tal propósito, se ha considerado que las separaciones lumínicas se comportan como superficies lambertinas, esto es, reflejan por igual en todas las direcciones. De esta manera, se puede conseguir un modelo analítico de su comportamiento. Y a partir de esta modelización se podrá ubicar el paralelepípedo y sus dimensiones, atendiendo al objetivo de iluminación uniforme en la superficie de inspección según se vio en 3.3.1.5.

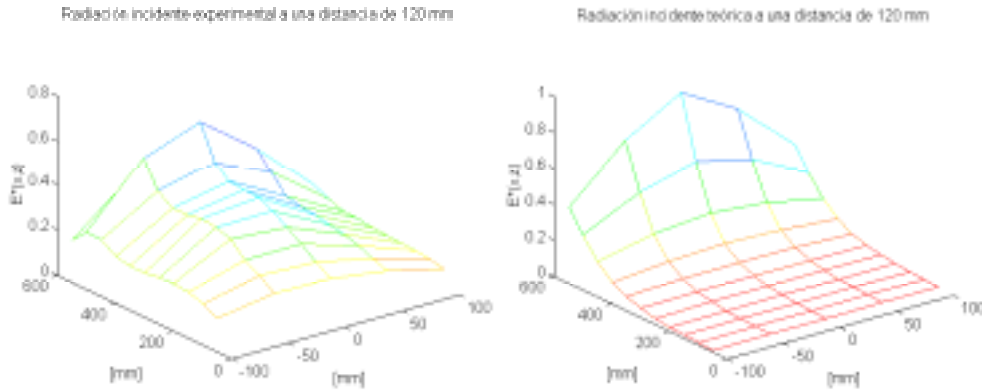
En primer lugar habrá de verificar la coincidencia entre la radiación estimada y la medida, para ello se considera que la radiación incidente sobre una de las pantallas seguirá la siguiente expresión:

---

<sup>2</sup> Producto comercial registrado

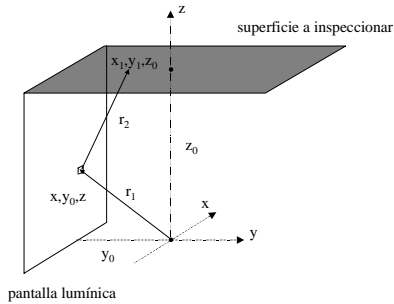
$$E(x, z) = \frac{I \cos \theta_1}{r_1^2} = \frac{I y_0}{(x^2 + y_0^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3.58)$$

donde  $y_0$  es la distancia entre la fuente y la pantalla, figura 3.31. Normalizando la expresión a  $E^*(x, z)$ , tanto la experimental como la analítica, se observa (ver figura 3.30) la validez del planteamiento, sin necesidad de recurrir a utilizar funciones ponderadas.



**Figura 3.30 Radiación incidente en una pantalla**

En ( 3.58 ) no se ha aplicado ponderación como en el caso anterior, pues la iluminación recibida se encuentra fuera del cono luminoso de la fuente, recuérdese que la apertura de la lámpara era de  $30^\circ$ .



**Figura 3.31 Geometría de las pantallas y la escena SIVA**

Una vez estudiada la radiación incidente sobre las pantallas, se pasa a determinar la óptima colocación respecto al centro del foco. Considerando que las superficies del paralelepípedo radian por igual en todas las direcciones, esto es, se comporta según la ley de Lambert, la distribución luminosa debida a la radiación reflejada de las pantallas en el escenario SIVA será:

$$E(x_1, y_1) = \sum_{i=1}^4 I k_{dif} \iint_S \frac{\cos \theta_{1,i}}{r_{1,i}^2} \frac{\cos \theta_{2,i}}{r_{2,i}^2} dS \quad (3.59)$$

siendo el sumatorio extendido para las cuatro paredes y  $k_{dif}$  el coeficiente de reflexión. Si se introduce las relaciones geométricas existentes quedará:



$$E(x_1, y_1) = Ik_{dif} \sum_{i=1}^2 \iint_{x,z} \frac{y_{0,i}}{(x^2 + y_{0,i}^2 + z^2)^{3/2}} \frac{z_0 - z}{((x_1 - x)^2 + (y_1 - y_{0,i})^2 + z^2)^{3/2}} dx dz +$$

$$Ik_{dif} \sum_{i=1}^2 \iint_{y,z} \frac{x_{0,i}}{(x_{0,i}^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \frac{z_0 - z}{((x_1 - x_{0,i})^2 + (y_1 - y)^2 + z^2)^{3/2}} dy dz + \quad (3.60)$$

donde  $y_{0,i}$  y  $x_{0,i}$  son las distancias entre las pantallas y el foco, junto con  $z_0$  que representa la separación entre la superficie de inspección y el foco. Si se analiza el desarrollo de Taylor sobre la radiación reflejada de un par de pantallas para un dS, quedará los términos de primer y segundo orden como:

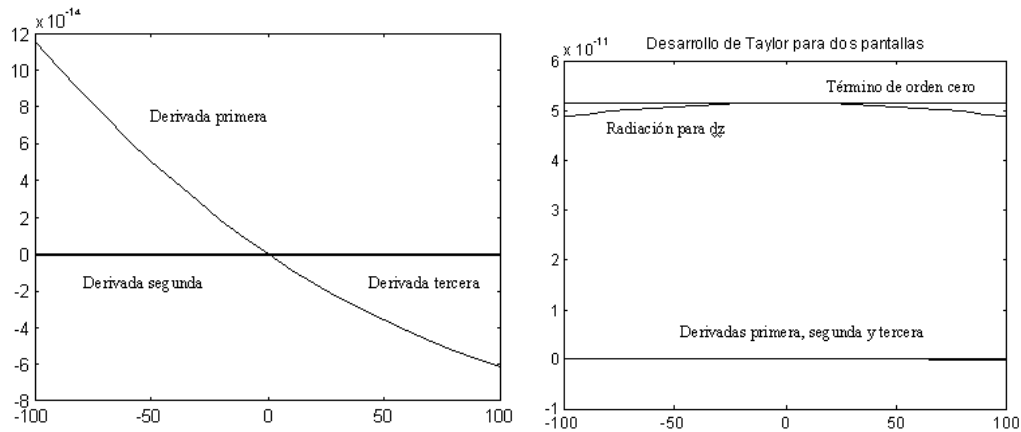
$$\frac{\partial E(x_1, y_1)}{\partial y_1} = -3 \frac{y_{0a}(z_0 - z)(y_1 - y_{0a})}{r_{1a}^3 r_{2a}^5} - 3 \frac{y_{0b}(z_0 - z)(y_1 + y_{0b})}{r_{1a}^3 r_{2a}^5}$$

$$\frac{\partial^2 E(x_1, y_1)}{\partial^2 y_1} = 15 \frac{y_{0a}(z_0 - z)(y_1 - y_{0a})^2}{r_{1a}^3 r_{2a}^7} - 3 \frac{y_{0a}(z_0 - z)}{r_{1a}^3 r_{2a}^5}$$

$$+ 15 \frac{y_{0a}(z_0 - z)(y_1 + y_{0b})^2}{r_{1a}^3 r_{2a}^7} - 3 \frac{y_{0b}(y_1 + y_{0b})}{r_{1a}^3 r_{2a}^5}$$

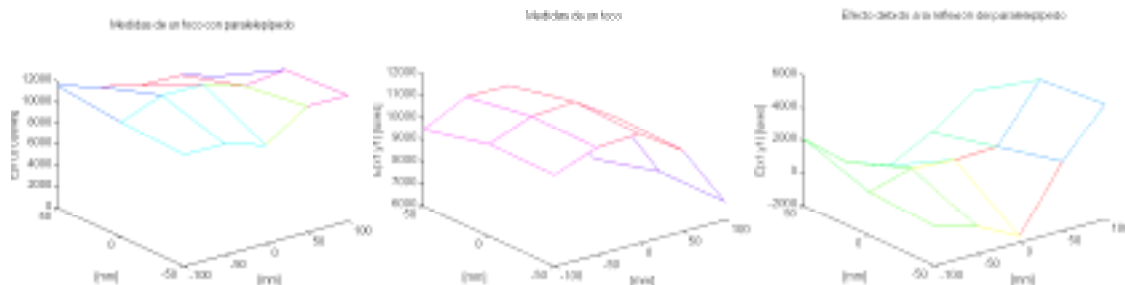
( 3.61 )

La condición de uniformidad exigirá que la separación a pares de las pantallas sean idénticas, ya que esta condición tenderá a cancelar todos los términos excepto el de orden cero. Si en ( 3.61 ) se hace  $y_{0a} = y_{0b}$ , las primeras derivadas se anulan en la normal al foco.



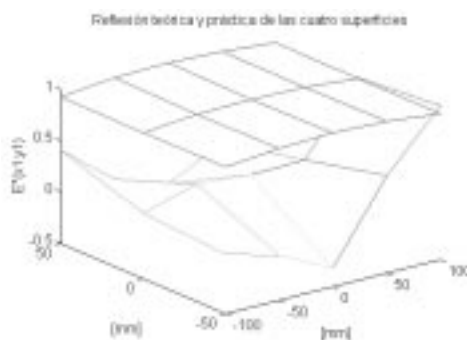
**Figura 3.32** Desarrollo de Taylor de la radiación incidente de dos pantallas simétricas debida a un dS. a) Primeras derivadas, b) Radiación para un dS y sus primeras derivadas

Por último quedará comparar los resultados experimentales con los conseguidos por el modelo. Respecto a los valores medidos, éstos se obtendrán de la resta entre los evaluados para un foco con el paralelepípedo y sin él. Se observa en primer lugar, que el efecto de la reflexión es de un orden de magnitud menor que la radiación incidente de la fuente. También es destacable cómo algunos valores se hacen negativos, lo cual no es



**Figura 3.35 Medida de la luminosidad en el escenario SIVA a) con foco y paralelepípedo b) con sólo foco c) sólo efecto de reflexión debida al paralelepípedo**

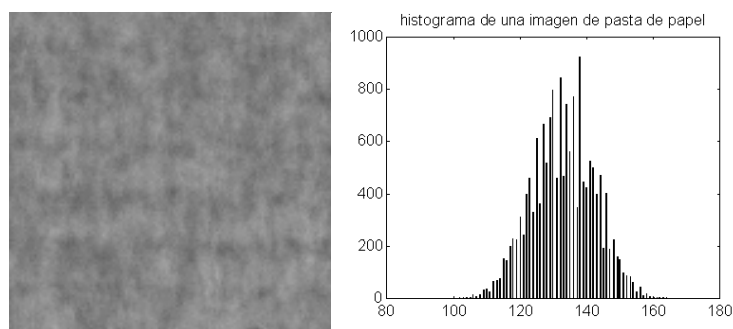
posible, lo que indica una falta de precisión en las medidas tomadas como consecuencia de la baja precisión del luxómetro utilizado. En tercer lugar, se observa el nivel de



**Figura 3.34 Discrepancia entre el modelo teórico y los valores medidos**

discrepancia entre los valores medidos de reflexión y el modelo teórico obtenido de ( 3.60 ). Y por último, se ha observado empíricamente que el aironfix tiene menor coeficiente de reflexión. No obstante, se ha utilizado la pintura mate en el recubrimiento del paralelepípedo, pues el aironfix es más receptivo de absorber polvo, lo que haría decrecer sus propiedades de cuerpo opaco con el paso del tiempo. El resultado conseguido es que la información recibida por el sensor sólo se debe a la textura del papel y no a la intensidad luminosa recibida, esto es, que la distribución del histograma de la imagen se debe sólo a la constitución del material ante una radiación luminosa transmitida, siendo

esta última de igual valor en todos los puntos del espacio de medida.



**Figura 3.33 Imagen recibida por el sensor y su hitograma**

### 3.5 Arquitectura de cámaras CCD en SIVA

Hay muchos factores a considerar cuando se va a elegir una cámara para un problema de inspección. Los aspectos primordiales se refieren a características tales como la arquitectura del array, la resolución, la sensibilidad, la relación señal ruido y las condiciones ambientales a las que las cámaras estén sujetas. Otros factores como la velocidad de la aplicación, la respuesta espectral, y el coste de las cámaras también juegan un papel importante. Por lo que a continuación se exponen los conceptos básicos sobre cámaras CCD, para permitir posteriormente proponer un método sobre la elección de arquitectura de cámaras en función de la aplicación SIVA en cuestión.

#### 3.5.1 Factores a considerar en la elección de las cámaras

##### 3.5.1.1 Arquitectura de array

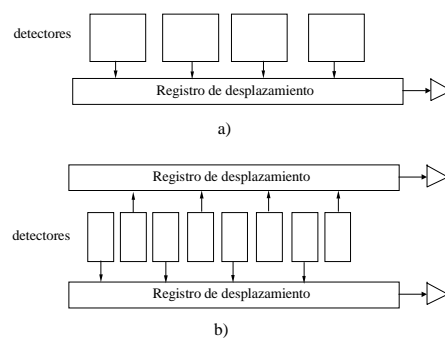
La arquitectura del array depende del tipo de aplicación a realizar. Por ejemplo, y en términos generales, las cámaras lineales, progresivas y TDI son las más utilizadas en inspección de superficies en movimiento. Mientras las cámaras entrelazadas son usadas, cuando se aplica supervisión en las que se puede parar el movimiento. Este botón de muestra, indica la importancia del tipo de arquitectura del sensor, por lo que se pasa a ver las ideas generales de cada una de ellas.

###### 3.5.1.1.1 Cámaras lineales

Si bien es posible encontrar cámaras matriciales de hasta 5120 x 5120 [Chamb95], éstas exigen anchos de bandas muy elevados. Por ejemplo, si se desean 25 imágenes por segundo, el volumen de información es de 640 Mpixel/s, haciéndose prohibitivo para la mayoría de las aplicaciones industriales. Con el fin de evitar este exceso de información, y si se desea alta resolución, la solución hay que encontrarla en las cámaras lineales.

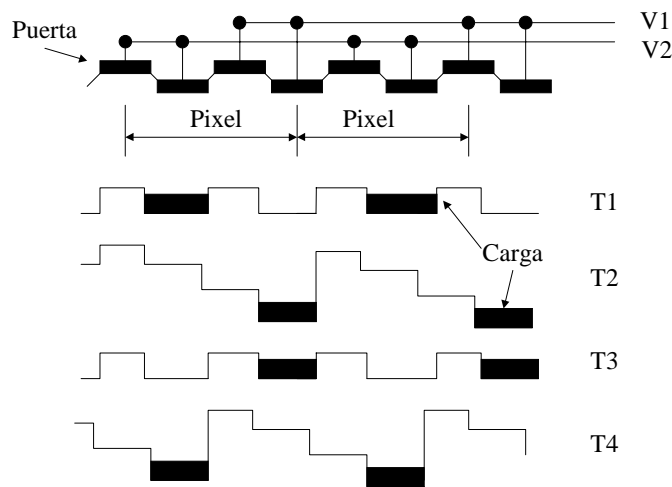
Las cámaras lineales son usadas en aplicaciones donde, bien la cámara o bien el objeto están en movimiento en dirección perpendicular a la fila de sensores. Muy típicos de inspección de superficies continuas en movimiento.

Constructivamente las cámaras lineales carecen de distancia interpíxel, esto es, no existen zonas no sensibles. Ello es debido a que el registro de desplazamiento se encuentra a uno de los lados de los fotosensores, y aunque



**Figura 3.36 a) un único registro de desplazamiento b) doble registro**

éste también es sensible a la luz, se cubre con una capa protectora. No obstante, el tamaño total del pixel está limitado por la puerta de control. Así en un sistema de dos fases de transferencias de carga, esto es, dos señales desfasadas,  $V_1$  y  $V_2$ , que son utilizadas para transferir las cargas desde los fotosensores al registro de lectura mediante el efecto CCD (como se observa en la figura 3.38), la anchura del pixel depende del ancho de la puerta (el lector puede encontrar bibliografía variada en torno a las transferencias de carga y la estructura misma de los CCD, por ejemplo [Holst96]). En el ejemplo de la ilustración, se ve que el pixel debe ser de dos veces la anchura de una puerta, es decir, el tipo de transferencia de las cargas impone el tamaño del pixel. Por eso, con el objeto de aumentar el número de píxeles e incrementar la resolución, se puede reducir el ancho del pixel

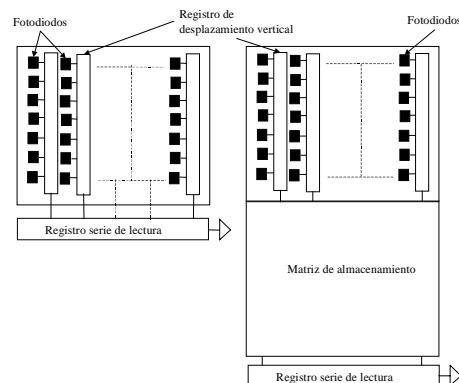


**Figura 3.38** Transferencia de carga en dos fases

mediante un doble registro (Figura 3.36b). Pudiéndose en este caso doblar la resolución de la cámara lineal.

#### 3.5.1.1.2 Cámaras entrelazada

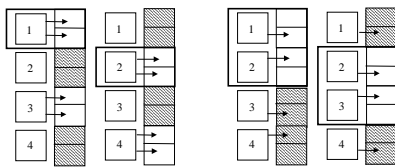
Otro tipo de cámaras ampliamente usadas son las entrelazadas, éstas consisten en un array de fotodiodos separados por registros de transferencia vertical, que son cubiertos por una capa opaca de metal (Figura 3.37). Después de la integración, las cargas generadas por los fotodiodos son transferidas al registro vertical CCD en un tiempo de  $1\mu s$ , minimizando los efectos de mancha. La principal ventaja de esta transferencia es la rapidez, del paso de la carga del sensor a la zona de



**Figura 3.37** Arquitectura de transferencia entrelazada a) registro b) zona de almacenamiento

almacenamiento, por lo que no hay necesidad de utilizar obturadores. La desventaja es que este tipo de salida implica una menor zona activa del sensor. El área efectiva puede estar por debajo del 20%. Aunque este factor puede ser ampliado mediante el uso de microlentes.

Existen variedades de arquitecturas de transferencias. Operan con dos, tres y cuatro fases. El número depende de la aplicación, pero para vídeo estándar los registros de desplazamiento son de cuatro fases, cuyas cargas son almacenadas en dos puertas (Figura 3.39). Con 2:1 entrelazado, ambos campos son almacenados simultáneamente pero leídos alternativamente, conociéndose como integración por cuadro. Con estándar CCIR cada campo es adquirido cada 1/50 s, así que el máximo tiempo de integración llegará a ser de 1/25 s.

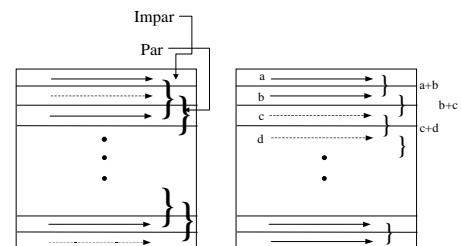


**Figura 3.39 a) Integración por cuadro  
b) Integración por campo**

Otra variante de integración para esta arquitectura, es la llamada integración por campo (Figura 3.39b), cambia el control de las puertas, tal que suma dos cargas en dirección vertical, generando un 50% de solapamiento entre los dos campos. Al tomar un par de píxeles se incrementa el doble de rango dinámico de la señal. Sin embargo reduce al 50% la MTF vertical.

Mientras que cualquier arquitectura puede ser usada para leer las cargas, al final el formato de vídeo limita la selección. Aunque las cargas son adquiridas en filas y columnas, las cámaras dan un formato de datos en serie, consistente con los monitores. En la Figura 3.40 se observan los estándares tanto para dispositivos entrelazados como los pseudo - entrelazados.

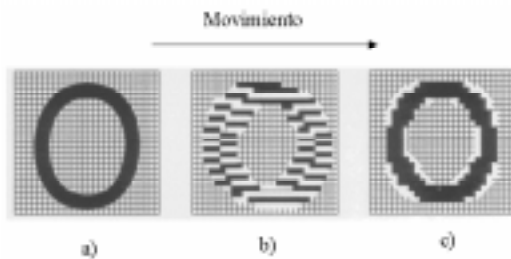
La ventaja del formato entrelazado es que permite disminuir los anchos de banda, manteniendo una consistencia debida a la inercia de la retina humana. El hecho de transmitir en dos campos las líneas pares e impares, ha provocado que los diseñadores de cámaras CCD entrelazadas hayan aprovechado este evento, como para hacer arquitecturas que comparten los recursos de lectura entre las líneas, obligando a que los tiempos de integración no coincidan entre líneas pares e impares. Este motivo obliga a detener la escena, al menos durante el tiempo necesario para la adquisición de la imagen, lo que supone un inconveniente grave.



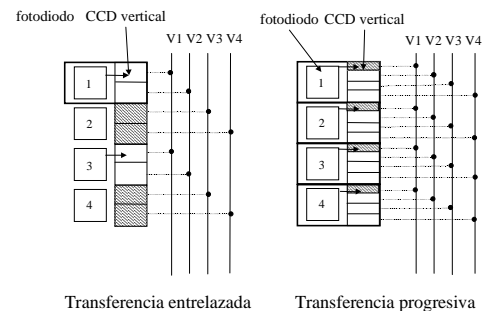
**Figura 3.40 Video entrelazado y pseudo-entrelazado**

### 3.5.1.1.3 Cámaras progresivas

La mayor desventaja de las cámaras entrelazadas está en el desfase de los tiempos de integración, bien sea entre líneas o entre campos. Con el objeto de evitar parar las superficies que están en movimientos acción requerida con cámaras entrelazadas, aparecen las cámaras progresivas. Éstas “escanean” secuencialmente línea a línea las imágenes. La primera ventaja de las cámaras progresivas es la de tomar imágenes en un mismo instante, en contraste con los sistemas entrelazados que adquieren secuencialmente la imagen en el tiempo. Así cualquier movimiento vertical producido entre campos, provocará manchas en la imagen, mientras movimientos horizontales originan cortes en las líneas verticales. Aún en el caso de utilizar luces estroboscópicas para parar el movimiento, se tienen imágenes continuas sólo en el campo que fue activado el pulso de luz. Cuando hay movimiento, sólo un campo puede ser usado para el procesamiento de imágenes, reduciendo en un 50% la resolución. En la figura 3.41 se aprecia la discontinuidad de las cámaras entrelazadas y la mejora de las progresivas, aumentando la resolución vertical respecto a las entrelazadas.



**Figura 3.41 Efecto del movimiento**  
 a) carácter en movimiento horizontal b)  
 Discontinuidad de la imagen debido al  
 sistema entrelazado c) salida de una  
 cámara progresiva



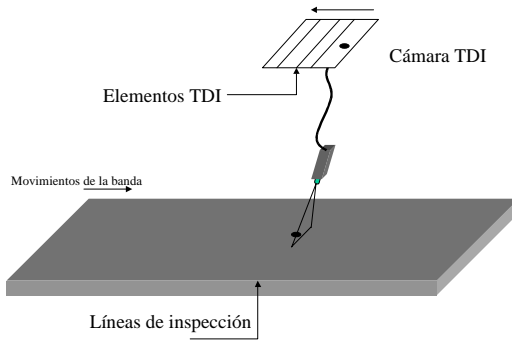
**Figura 3.42 Diferencias constructivas entre entrelazada y progresiva**

La diferencia entre progresivas y entrelazadas puede ser vista desde el punto de vista constructivo. Obsérvese en la figura 3.42 como las cámaras progresivas, de cuatro fases, difieren en su diseño, permitiendo almacenar cargas en el mismo instante de tiempo.

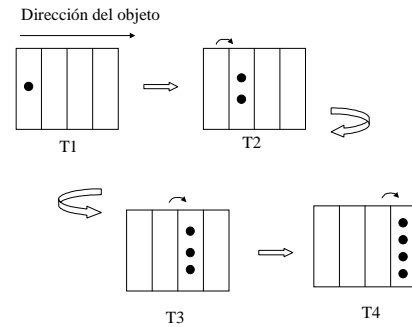
### 3.5.1.1.4 Cámaras TDI

Por último, las cámaras TDI (*Time-Delay and Integration*) han representado una pequeña revolución en el campo de la inspección de superficies continuas. TDI implica los conceptos de múltiples exposiciones del objeto ante la cámara y su posterior suma. La conjunción de desplazamientos automáticos de las cargas, de un detector a otro, junto con los tiempos de exposición, producen múltiples imágenes. La figura 3.44 muestra el efecto TDI. La lente de la cámara invierte el movimiento del objeto, recorriendo la matriz de detectores, mientras las cargas de un sensor a otro son desplazadas a la misma velocidad.

La sincronización entre la cámara y la superficie en movimiento, es realizada mediante el conocimiento de la velocidad de ésta, por ejemplo a través de un encoder.



**Figura 3.44 Inspección con cámaras TDI**



**Figura 3.43 Concepto TDI**

Para entender el modo de operar de una cámara TDI, se sigue la figura 3.43. En el tiempo T1, la imagen se sitúa en el primer detector y crea una carga. Llegado el tiempo T2, la imagen se ha desplazado al segundo detector. Simultáneamente, el reloj del pixel ha movido la carga del primero al segundo. En este punto, se crea una imagen formada por la carga anterior añadiéndose la nueva creada en el segundo detector, y así sucesivamente. La carga (señal) se incrementa linealmente con el número de detectores, también lo hace el ruido pero no proporcionalmente sino con la raíz cuadrada del número de elementos TDI,  $N_{TDI}$  [Holst96]. El resultado es una mejora de la relación señal ruido en  $\sqrt{N_{TDI}}$ . No obstante, existe un límite máximo de elementos TDI que puedan ser utilizados. Es evidente que una pérdida de sincronismo afecta negativamente en la MTF de la cámara. La exactitud en el conocimiento de la velocidad de la imagen, es la que limita el número de TDI que van a ser usados en cada etapa de múltiples exposiciones.

### 3.5.1.2 Resolución

Una de las características más importantes dentro de las cámaras de estado sólido es la resolución. La resolución puede referirse tanto al número de píxeles contenidos en la matriz sensorial, como al número de líneas de televisión producidas. Las líneas de televisión es un viejo estándar que permaneció durante la primera expansión de cámaras de tubo de vacío. Este estándar se encuentra en desuso, aunque suele estar presente en muchos catálogos de productos referidos a cámaras. Las líneas de televisión se refieren a la frecuencia en que una imagen es dividida por un modelo periódico. A este respecto, las líneas televisión corresponden con el sistema de visualización, en comparación al detector que hace referencia al número de píxeles en filas y columnas.

Si la resolución viene dada en píxeles, se especifican, normalmente, por separado las dos direcciones, es decir, la horizontal y la vertical. Principalmente, este factor determina el elemento más pequeño en que una imagen puede ser fraccionada. Tamaños típicos de arrays de píxeles van desde 240x320 hasta 1024x1024.

Es importante hacer notar que, aunque un mayor número de píxeles produce un aumento de la resolución, también es cierto que se traduce en una superlativa información a procesar. A este respecto, una mayor resolución tiene un aspecto negativo frente a la velocidad de procesamiento de esta información.

Si la resolución se basa en la capacidad de las cámaras de distinguir más objetos dentro de la escena, este concepto no depende sólo del número de píxeles. La resolución final de una cámara dependerá de las lentes que se usen, del número de píxeles contenidos en el sensor, del tipo de mecanismo de transferencia del chip detector y de la tarjeta digitalizadora empleada. Por lo que habrá de considerarse la resolución en su globalidad y no sólo en el número de píxeles.

### 3.5.1.3 Sensibilidad

La sensibilidad es el término usado para describir la mínima cantidad de intensidad de luz que un sensor de una cámara es capaz de detectar y, por tanto, obtener un nivel de tensión en la salida. Esta característica puede ser un factor determinante en la elección de la cámara. Las típicas CCD tienen un rango de 0.015 luxes a 5 luxes. Las cámaras que son muy sensibles pueden ser muy útiles en aplicaciones con bajos niveles de luz, tales como la inspección de películas de fotografía. Para niveles bajos de luz, las tecnologías de cámaras CCD han creado lo que se conoce como ICCD cámaras (*Intensified CCD*), las cuales incorporan un intensificador de luz consistente en una pantalla de fósforo y un cátodo que está acoplado al sensor del CCD. Estos tipos de cámaras no son apropiados para procesos o entornos donde hay mucha intensidad de luz, debido a que se pueden producir saturaciones.

### 3.5.1.4 Velocidad/Tiempo de integración

La velocidad o la frecuencia vertical de una cámara típica CCD es de 25 cuadros por segundo (estándar CCIR vídeo). Una pantalla de un vídeo se compone normalmente de dos campos separados que son adquiridos a una frecuencia de 50 hertzios. Esta frecuencia es normalmente insuficiente para la mayoría de las aplicaciones de inspección en línea. El tamaño del array de los píxeles también influyen en la frecuencia. La razón es que a más píxeles a leer, más tiempo llevará, por lo que una ganancia en resolución conlleva un sacrificio de la velocidad.

El tiempo de integración debe ser considerado cuando se trabaja con altas velocidades. El tiempo de integración es el período de tiempo durante el cual a un pixel se le permite acumular carga. Las aplicaciones que tienen altas velocidades a menudo requieren reducidos tiempos de integración para evitar manchas en las imágenes o desenfoques en las mismas. Para bajos tiempos de integración, el obturador electrónico



puede ser una buena solución. Estas cámaras que llevan incorporado el obturador, impiden la acumulación de cargas filtrando las mismas dentro del substrato detector según varios y diferentes métodos. La velocidad de estos obturadores varía entre 1/60 segundos y 100 microsegundos para aplicaciones que requieran las más altas velocidades. Las cámaras con obturador electrónico contienen además un cristal con un líquido ferroeléctrico para proveer del mecanismo del obturador. Este cristal líquido está localizado justo detrás de las lentes.

En algunas aplicaciones es necesario que la cámara se pueda disparar (“*reseteable*”), esto es, que la acumulación de la carga pueda ser eliminada de manera asíncrona. Su origen viene dado por la necesidad de adquirir la imagen tras efectuarse un evento, lo cual se determina, normalmente, por una señal de disparo, provocada por el sistema, el cual envía una señal de *reset* para que la cámara pueda adquirir una imagen ante el suceso.

Como se ha indicado, a veces la aplicación requiere de una disminución del tiempo de integración, pero ello obligará a aumentar la potencia luminosa, con el objeto de mantener el suficiente rango dinámico en la señal de video.

#### **3.5.1.5 Señal de ruido**

La relación señal/ruido, SNR, indica la proporción de potencia entre una señal y la cantidad de ruido presente en ésta, esto es, muestra la proporción de energía de una señal que puede ser considerada útil, lo que viene a significar que a menor SNR, menos útil es la señal. Este aspecto está íntimamente relacionado con la discusión de la MTF.

La mayoría de las cámaras de estado sólido CCD tienen alta relación señal/ruido, típicamente oscilan entre 45 dB y 65 dB, que es prácticamente la ausencia de ruido para la mayoría de las aplicaciones. La relación señal/ruido depende enormemente de algunos factores tales como la temperatura, el contraste, la longitud de onda y la intensidad de luminosidad.

#### **3.5.1.6 Respuesta del espectro**

La respuesta espectral de una cámara se refiere a la región del espectro electromagnético en el que una cámara es sensible. Por ejemplo, el ojo humano tiene una respuesta máxima espectral entre la región del azul y el verde del espectro visible. Las cámaras de estado sólidos son sensibles en un rango de 200 nm a 1100nm. La máxima respuesta se encuentra en torno a los 800 nm de longitud de onda, la cual se encuentra cerca del final de la zona infrarroja del espectro. Ésta es la causa por la que la mayoría de las cámaras de estado sólido vienen con un filtro IR incorporado. De otro lado, la respuesta espectral difiere enormemente de un comportamiento ideal, pues dependiendo de cada longitud de onda su ganancia varía, esto es, la respuesta es altamente no lineal. El tipo de aplicación y en particular el sistema de iluminación, obligará a una selección de cámara atendiendo a su respuesta espectral.

### 3.5.1.7 MTF

La función de transferencia de modulación (*Modulation Transfer Function*) es una medida de cómo el sistema de imagen es capaz de reproducir con fidelidad la escena adquirida. Matemáticamente, representa el módulo del valor complejo de la función de transferencia óptica (OTF), por tanto representa la ganancia del sistema óptico para cada frecuencia, es evidente que la MTF carece de información sobre el nivel de intensidad de la señal.

La MTF es calibrada generalmente entre el contraste en la salida respecto a la cantidad de líneas por milímetro visibles que se pueden obtener. La MTF de una cámara puede ser medida de diferentes formas, siendo una de las más comunes aquella que determina cómo recoge una cámara unas series de pares de líneas blancas y negras de frecuencia variable. La medida se determina con el nivel de tensión producido por la cámara al ver los pares de líneas blancas y negras. Obsérvese que al hablar sobre la OTF, no sólo se trata a la cámara, sino a la conjunción de elementos de captación, es decir, óptica, detector, transmisión y adquisición.

### 3.5.1.8 Entorno

Quizás uno de los aspectos más importantes, que hay que considerar en la elección de una cámara de estado sólido, para una aplicación de inspección, es el entorno donde la cámara va a operar. A este respecto, tendrá poco sentido elegir una cámara con todas las características correctas si la cámara no soporta el ambiente de trabajo. Los factores del entorno como temperaturas, vibraciones, contaminantes en el ambiente, etc. necesitan ser estudiados para saber qué cámara es la que se adapta mejor a estos ambientes. En algunos casos se hace necesario el encapsulado apropiado de las cámaras para protegerlas.

Algunos fabricantes suelen ofrecer sus cámaras con encapsulamientos especiales para incrementar su resistencia a todos estos factores que han sido mencionados. Por ejemplo, Peñafiel et al[Peñaf94] utilizan cámaras protegidas contra la radiación, para la inspección de intercambiadores de calor en centrales nucleares.

### 3.5.1.9 Coste

En términos generales y para una misma arquitectura de array, las cámaras con mayor número de píxeles poseen precios más altos. Lo que sí se puede tener en cuenta a la hora de comprar una cámara son algunas apreciaciones o alternativas. Por ejemplo, si se necesita alta resolución, puede ser más barato usar varias cámaras de baja resolución que solamente una cámara con una muy alta resolución. Frecuentemente no hay una única solución para una determinada aplicación, lo que permite una cierta flexibilidad en la elección de la cámara.

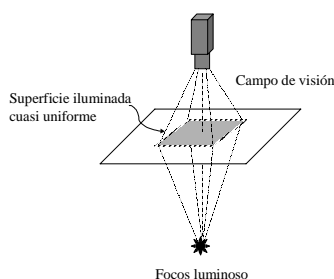
### 3.5.2 Cómo elegir la cámara

Una vez definidas las características básicas de la escena a adquirir, se propone el siguiente proceso para la elección adecuada de la arquitectura de cámaras, atendiendo al objetivo de inspección de superficies, con tal propósito habrá de responder a las siguientes preguntas:

1.-¿Qué resolución se necesita? Para determinar la resolución requerida, hay que determinar dos factores. El primero, cuál es la característica más pequeña a observar, y segundo, cuál es el campo de visión deseado a adquirir. Para obtener la resolución de una cámara, simplemente se divide el campo de visión por el tamaño de la característica más pequeña de interés. Como regla general, lo mejor es permitir que la característica más pequeña sea representada por, al menos, un cuadrado de 2x2 píxeles[Vando90]. Pero en esta tesis, la resolución se ha hecho depender de los tipos de algoritmos de detección de defectos. Por ejemplo, en la aplicación desarrollada para la inspección de papel, cuyo fundamento se basa en píxeles de alto contraste (ver capítulo 4), el tamaño del defecto más pequeño se hace corresponder con el área de un pixel, que en el caso del papel es de  $0.015 \text{ mm}^2$ .

Por otro lado, el campo de visión suele venir dado por la capacidad del sistema de iluminación, ya que en general se pretende una intensidad luminosa uniforme en toda la superficie a inspeccionar por la cámara. En el ejemplo del papel, tal como se vio en 3.4.2, se tiene 50 mm longitudinales por 75 mm transversales de campo visual, en el que aparece una distribución cuasi-uniforme de intensidad lumínica. Por tanto se plantea el problema en los siguientes términos:

- Defecto más pequeño (atendiendo a la característica más pequeña, píxeles de alto contraste):  $0.015 \text{ mm}^2$  (  $0.1 \text{ mm} \times 0.15 \text{ mm}$  )
- Campo de visión (superficie con iluminación uniforme):  $50 \text{ mm} \times 75 \text{ mm}$  (proporción  $\sqrt{2}$ , típica de la arquitectura de video)
- Resolución (horizontal) =  $(50 \text{ mm}/0.1 \text{ mm}) \times 1 \text{ pixel de alto contraste} = 500 \text{ píxeles}$ .
- Resolución (vertical) =  $(75 \text{ mm}/0.15 \text{ mm}) \times 1 \text{ pixel de alto contraste} = 500 \text{ píxeles}$



**Figura 3.45 Campo visual de inspección**

Para el ejemplo, se elegiría una densidad de píxeles en el array detector de al menos  $500 \times 500$  píxeles. Además implica, que una vez decidido el tipo de cámara, el área del pixel es fija y conocida, por lo que se está definiendo también la geometría del sistema de adquisición de imágenes y la óptica necesaria. Así, el campo de visión se usa también para calcular la cantidad de aumentos necesario. Para determinarlo, se tiene que dividir el tamaño del array por la dimensión del campo de visión deseado. Para la situación descrita arriba, el tamaño del array detector es de  $4.5 \text{ mm} \times 7.3 \text{ mm}$  (cámara tipo WATEC902A). En este caso,

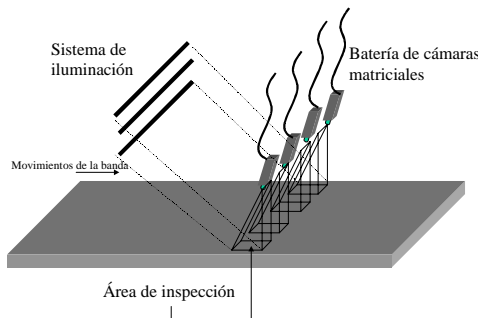
si se divide 50 mm entre 4.5 mm, se obtienen los aumentos necesarios de 11X. Esta información puede ser usada después para identificar las lentes necesarias para la cámara seleccionada.

En el caso de obtener una resolución elevada, se puede optar por dos soluciones. Si es posible parar la escena, puede resultar ser más ventajoso utilizar varias cámaras de baja resolución en lugar de una de alta resolución, pues se consigue disminuir anchos de banda puntuales y resulta ser una solución más económica. Si la escena no se puede detener y el número de detectores a utilizar es elevado, bien porque la arquitectura de iluminación sólo permite iluminar uniformemente una estrecha banda, o bien porque se quiere cubrir el ancho de la banda del material a inspeccionar, las cámaras lineales y TDI son las más apropiadas. Estas cámaras tienen la ventaja de poner decenas de miles de píxeles en línea, cubriendo toda la cubierta de la superficie y con una resolución muy alta. La adquisición de una sola línea permite un ancho de banda razonable, aun con centenas de miles de detectores. Por otro lado, las altas velocidades hacen que los tiempos de exposición sean muy pequeños, obligando a aumentar la intensidad luminosa. Esta consecuencia, puede ser disminuida con cámaras TDI, siendo la más utilizada en inspección de superficies continuas en línea.

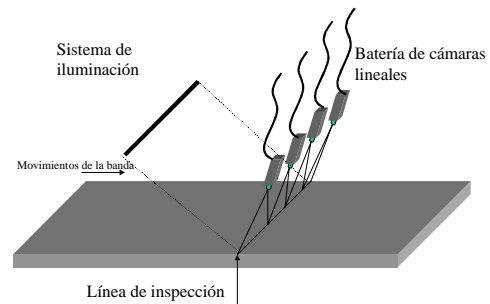
2.-¿ Es estacionaria la superficie ? La respuesta a esta pregunta determinará el uso de iluminación especial y el tipo de arquitectura de las cámaras. El propósito de usar iluminación especial, como pueden ser luces estroboscópicas, o la obturación automática, es congelar el movimiento de un objeto para eliminar las manchas producidas por el movimiento de la imagen. Hay que tener en cuenta que, una cámara cuánto más rápido se obture más luz se necesita. Esto es debido a que la cámara tiene menos tiempo para acumular fotones.

Para superficies continuas de alta velocidad, como la producción de acero[Domin94], los tiempos de integración son muy pequeños, por lo que se requiere gran intensidad luminosa. Como ha sido comentado, las cámaras TDI son la solución, pues permiten aumentar el rango dinámico a consecuencia de la suma de cargas en elementos TDI. Si la resolución es media y es posible conseguir iluminación uniforme en el campo de visión, las cámaras progresivas pueden ser empleadas. Y para baja resolución, cámaras entrelazadas con integración por campo y sub-muestreo en la señal de vídeo, pueden ser elegidas por su bajo costo y formato de salida estándar. Obsérvese que emplear integración por campo en vez de por cuadro, permite a la imagen mayor continuidad y por ende mayor MTF. Si se hubiera utilizado integración por cuadro con sub-muestreo, al ver sólo un bloque de líneas, pares o impares, se apreciara una discontinuidad en la imagen y por tanto degenerará su calidad.

Las figuras 3.46 y 3.47 muestran las dos arquitecturas básicas de inspección superficial, la primera basada en cámaras matriciales y la segunda en lineales.



**Figura 3.46 Inspección de superficies con cámaras matriciales**



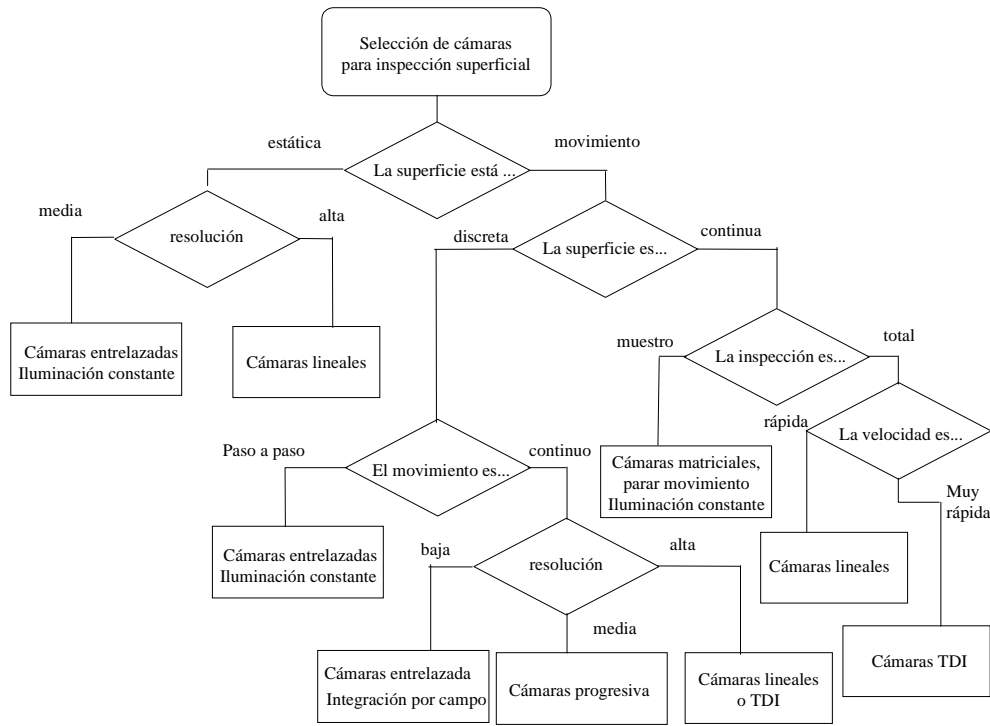
**Figura 3.47 Inspección de superficies mediante cámaras lineales**

3-¿ Qué tipo de inspección va a realizarse ?. Difiere si se va hacer a modo de muestreo o en su totalidad. Para el primer caso, se trata de capturar un conjunto de muestras de la globalidad. El efecto sobre la elección de la cámara es la posibilidad de relajar las exigencias, pues el volumen de información puede ser regulado según el soporte físico elegido. Aquí no aparece el concepto de tiempo real, el sistema de inspección no está obligado por el proceso físico a detectar a una velocidad determinada. La solución es el uso de cámaras entrelazadas, cuando la superficie está inmóvil, o bien, cámaras progresivas cuando se está en movimiento.

Si la inspección es realizada en la totalidad de la banda, y las bobinas tienen transversalmente gran dimensión, se hace necesario el uso de cámaras lineales y en altas velocidades, cámaras TDI. Las razones son por un lado la necesidad de colocar miles de detectores por línea, implicando un gran volumen de información, y de otro el movimiento en línea, que exige de un procesamiento en tiempo real, sólo abordable desde cámaras lineales o TDI.

4.- Una vez que los requerimientos de arquitectura del array, resolución y tiempo de integración han sido fijados, se pueden comparar las características de las cámaras comerciales, dentro del mismo tipo. Es el momento de establecer la solución definitiva atendiendo a costes, sensibilidad, MTF, entorno, etc. Habrá de atender a todo lo expuesto sobre la formación de las imágenes digitales.

Para terminar, la figura 3.48 presenta un flujograma, a modo de resumen, que pueda ayudar en la selección de la cámara ante una tarea de inspección superficial. La primera división que se observa, es si la superficie está en reposo o en movimiento. Para superficies



**Figura 3.48 Flujograma para la selección de las cámaras más adecuadas**

estáticas dependerá del tipo de resolución, ya que como se ha visto, un número elevado de píxeles obligará a hacer uso de cámaras lineales. Cuando la superficie está en movimiento y ésta es continua, caso del acero, el aluminio, etc., con el objetivo de cubrir todo el ancho de las bandas es necesario recurrir a cámaras lineales o últimamente a cámaras TDI. La diferencia entre una y otra está en la sincronización de velocidad del proceso, una mejora de la relación señal-ruido y que necesita menos intensidad luminosa la segunda respecto a la primera.

Para el caso de inspección basada en muestreo, si se permite parar la imagen durante el tiempo de adquisición, se puede utilizar cámaras entrelazadas y si hay movimiento cámaras progresivas.

Para superficies discretas y con desplazamiento paso a paso, es decir, exposición del material sobre las cámaras y retirada, caso de inspección de baldosas[Fernán97a] o billetes de banco[Sebas95], se puede emplear cámaras entrelazadas. Mientras para productos que se mueven continuamente, por ejemplo la inspección de etiquetas sobre

superficies planas [Plate98a], dependiendo de la resolución se suele utilizar entrelazadas con integración de campo, progresivas o TDI, según sea baja, media o alta resolución.

### 3.5.3 Ejemplos de formación de imágenes en escenas SIVA

En este último apartado, se recoge en la tabla 3.3, a modo de resumen, las técnicas empleadas en la adquisición de imágenes de SIVA industriales, aplicados a superficies planas.

**Tabla 3.3 Formación de imágenes de SIVA**

Material a inspeccionar	Tipo de inspección (superf./veloc.)	Iluminación	Arquitectura de cámaras	Referencia
Acero	en línea, alta velocidad (15m/s)	Uniforme controlada	Cámara lineal de 2048 píxeles	[Domin94]
Aluminio colado	en línea, baja velocidad (2m/min)	tipo área uniforme, formada por tubos fluorescentes y difusor. Componente especular	Cámaras matriciales entrelazadas, 4 cámaras por cada cara	[Plate94]
Baldosas	Discreta, paso a paso	tipo área uniforme, formada por focos puntuales de naturaleza halógena. Componente especular	Batería de cámaras progresivas de 512x512	[Ferna97a]
Billetes de banco	Discreta, paso a paso	Focos halógenos puntuales. Componente difusa	Batería de cámaras entrelazadas 768x571	[Sebas95]
Etiquetas farmacéuticas	discreta, continua y media velocidad	Foco corona. Componente difusa	Integración por campo	[Plate97a]
Genérico (acero, plástico, madera)	En línea, continuo y en movimiento	1 o 2 láseres de 780nm	Cámaras lineales	[Intec93a]
Genérico (productos continuos)	En línea, continuo y en movimiento	Luces estroboscópicas	Baterías de cámaras entrelazadas, 510x485	[Aero93]
Pasta de papel, método ENCE	Muestro	Tipo puntual con pantallas. Componente transmitida.	Cuatro cámaras entrelazadas, 500x576	[Plate98]
Pasta de papel, método TAPI	Muestro	Tipo línea. Componente reflejada	Cámaras lineales	[Intec93b]

Películas	En línea	Fluorescentes VHO a 60 kHz. Componente transmitida	Batería de cámaras TDI	[Rober93]
Planchas metálicas galvanizadas	En línea	Tubo fluorescente de alta frecuencia. Componente especular	Cámara lineal de 2048 píxeles	[Macai93]
Textiles	Muestro	Fluorescente. Componente reflejada	Entrelazada 768x756	[Serran95]

### 3.6 Conclusiones

En este capítulo se han analizado los factores que intervienen en la adquisición de imágenes digitales, siendo los más importantes la iluminación, los elementos ópticos, los sensores y las tarjetas de adquisición. Además, se indica que dependiendo de la métrica requerida, se necesita considerar más o menos elementos a tener en cuenta para el diseño del sistema de adquisición de imágenes. Por el nivel tecnológico y las prestaciones requeridas para los SIVA implementados, sólo se ha abordado el diseño del sistema de iluminación y la elección de cámaras de estado sólido.

Para el diseño del sistema de iluminación se precisa del estudio sobre el comportamiento de las superficies ante la radiación luminosa, exponiéndose los diferentes modelos existentes, así como indicando la validez de cada uno de ellos. Además también se pasa al análisis de las fuentes luminosas, indicando sus características y las ecuaciones de comportamiento. Por otro lado, y en términos generales, se suele requerir una iluminación uniforme en el escenario SIVA, con tal propósito es necesario conseguir la expresión analítica de la radiación incidente en la superficie a inspeccionar, para a renglón seguido buscar las condiciones geométricas que intenten anular los términos de primer orden y superior del desarrollo de Taylor.

También se ha presentado una metodología para el diseño del sistema de iluminación, que consta de la definición del tipo de fuentes luminosas más la localización del binomio fuentes – cámara respecto a la superficie. El método se basa en un procedimiento de cuatro puntos: primero, estudio sobre el espectro de la luz para determinar la región de ésta que aumente el realce de los defectos; segundo, determinación de las componentes de la luz a adquirir junto con el modelo de superficie a utilizar, tal que explique la respuesta de ésta ante la excitación luminosa; tercero, modelización de las fuentes luminosas, el material no defectuoso y el defectuoso; y cuarto, simulación de la escena en diferentes posiciones espaciales. Parte de esta metodología ha sido empleada en el diseño del sistema de iluminación para la inspección de pasta de papel.

Para terminar, se ha pasado al análisis de los factores que influyen en la elección de una arquitectura de cámaras CCD, poniendo especial énfasis en la arquitectura del sensor. Proponiéndose a continuación un método básico para la selección de las cámaras atendiendo a las especificaciones del SIVA a implementar.



# 4 Detección visual de defectos locales

---

Se pretende mostrar una metodología sobre la detección de defectos locales en superficies homogéneas, mediante técnicas de Visión artificial, y que además, ésta pueda ser aplicada de manera industrial. Bajo este epígrafe aparecen las definiciones que delimitan el problema a resolver. En primer lugar, el material a inspeccionar debe ser homogéneo, esto es, que su composición y estructura sean uniformes [RealA96], como es el caso del acero, el aluminio, el papel, y otros materiales artificiales.

El estudio se centra en la detección de defectos de carácter local, anomalías puntuales en la materia que no hacen cambiar significativamente las propiedades físicas y químicas globales de la materia, sino sólo faltas visuales con influencias locales en las características de las sustancias. Aunque estas faltas locales repartidas en el material, definen el tipo de calidad del material y por ende las propiedades del producto.

La aplicación de técnicas de Visión artificial implica que los defectos deben tener una apariencia visual distinta del resto de la materia que es catalogada como no defectuosa. Además, en este marco de trabajo, se exige que con sólo la componente de luminancia de la luz recibida por el sensor, sea capaz de discernir entre defecto o no. Esta restricción es muy importante, al no abordar la inspección visual con tratamiento de colores. No obstante, ésta es una práctica común en estos tipos de SIVA [Newma95], que por otro lado minimizan la cantidad de información a procesar.

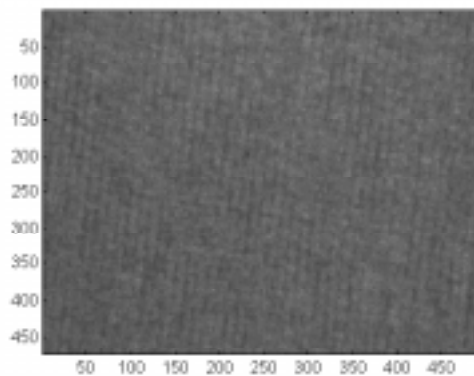
Y por último, si la aplicación debe ser industrial, el procesamiento de detección tiene restricciones de tiempo, definiendo las prestaciones de soporte físico (*hardware*) y de ejecución de algoritmos, acotando aún más los posibles caminos de actuación. Así si se utilizan, por ejemplo, medidas de texturas basadas en matrices de coocurrencia [Ferná97][Cases97], el coste computacional es tan elevado que sólo se podría realizar inspección de tipo muestreo, no permitiéndose trabajos de observación al 100%.

La problemática de la detección, circunscrita al marco de esta tesis, consiste en un proceso de decisión entre dos alternativas: qué parte de la señal recibida corresponde a material local defectuoso y qué otra parte es buen material, a las que se llamarán defecto y fondo, respectivamente.

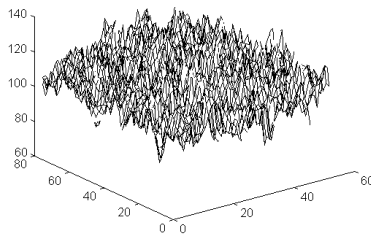
En general, la información adquirida de la superficie a estudiar suele estar entremezclada. La parte de los datos recibidos que representa el defecto visual suele ser minoritaria respecto al volumen total de información. Y de otro lado, la información del fondo, a parte de ser mayoritario, tiende a cancelar el mensaje de la porción defectuosa. En definitiva, la detección de defectos se presenta como un proceso de decisión donde la información está intrincada. Luego el éxito de este bloque dependerá de su nivel de acierto. Un buen diseño en esta fase simplificará la construcción de un presumible clasificador de tipos de defectos. Es esta etapa la que reemplaza el juicio subjetivo, pero flexible, del inspector humano por la decisión inflexible de la máquina. Por lo tanto, las especificaciones de requerimiento para la detección deben ser extremadamente cuidadas, buscando un criterio de calidad compatible entre el hombre y la máquina.

En este contexto, diseñador y cliente tienen que decidir cuales deben ser las especificaciones del control de calidad, área de inspección, tamaños de los defectos, faltas que podrían no ser consideradas, etc. El conjunto de pautas deberán ser lo suficientemente claras como para delimitar qué se detecta y cuáles no serán descubiertas, verificándose con posterioridad el nivel aceptable de coherencia entre la inspección automatizada y la manual.

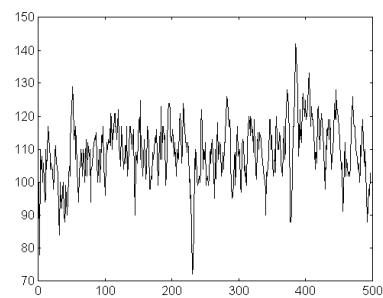
Las figuras siguientes muestran lo anteriormente mencionado. En la figura 4.1 se muestra pasta de papel con un defecto local, del tipo llamado *pitch*. Obsérvese en las figuras 4.2 y figuras 4.3, representación en 2D y 1D del defecto, correspondiente a un entorno de vecindad y a una fila con aparición del defecto, donde no existe una evidencia certera del defecto, aunque éste existe y es visualmente localizable.



**Figura 4.3** Pasta de papel con defecto tipo *pitch*



**Figura 4.2** Textura del papel con inclusión de defecto



**Figura 4.1** línea 200 conteniendo defecto *pitch*

## 4.1 La detección como un proceso de decisión

La detección es fundamentalmente un proceso de decisión, la cual recibe normalmente una señal representativa de la apariencia visual, constituyendo la entrada del sistema, y devuelve a su salida una variable binaria. Suele etiquetarse con '1' aquellos píxeles representativos de material defectuoso, mientras un '0' indicará que son píxeles del fondo.

Como todo proceso de decisión, de manera inexorable, la salida estará errada. Un eficiente detector es aquel que minimice el error de clasificación. Hay dos tipos de error: etiquetar con '1' material no defectuoso, al que tradicionalmente se llaman 'falsa alarmas', o el caso contrario, material defectuoso etiquetado con '0', denominado 'defecto no encontrado'. En definitiva, el mejor detector es aquél que minimice estos dos fallos.

Tal como acaba de reflejarse, es menester conocer algunas propiedades de la señal. Se considerará que un mensaje está presente, cuando éste cruce un determinado umbral. A veces es suficiente con la amplitud instantánea de la señal, como el utilizado para la inspección del acero[EES92], pero en general, será necesario un tratamiento previo para aumentar el contraste entre fondo y defecto, con el propósito de poder ser detectado más fácilmente. Este proceso de incrementar el contraste, requiere de una etapa previa antes del bloque de decisión. A este nuevo bloque se le llama 'realce' o 'etapa de procesado'. Las técnicas a emplear son múltiples y serán objeto de estudio en el siguiente apartado (4.2). La definición de esta etapa requiere de conocimiento explícito tanto de la señal del fondo como del defecto. Las técnicas que incrementan el contraste para la detección de los defectos, suelen basarse en operacionales, lineales o no, en el entorno de vecindad.

En el proceso de decisión, etapa clave del sistema de detección de defectos, la señal que proviene del fondo, a veces supera el umbral, generando falsas alarmas, o bien el mensaje del error no alcanza el umbral. La colocación de este umbral debe ser tal que minimice estas faltas. Un aumento restrictivo del umbral, implicará una reducción de defectos sin detectar, y de otro lado, una disminución del umbral lleva consigo un aumento de falsas alarmas. Por eso la selección del umbral óptimo implica una solución de compromiso.

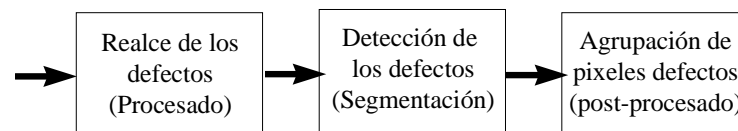
La detección vendrá concebida cuando la amplitud de la señal, tratada o no, exceda, por arriba o por abajo, de un determinado umbral. En esencia, se buscarán picos o depresiones en la amplitud de la señal. Si el mensaje se manifiesta de otra forma, tal como un cambio global de la textura, ésta llevará consigo un cambio en la distribución espectral de la señal. Obsérvese que el planteamiento es totalmente distinto. En el primer caso, hace referencia a defectos locales, mientras en el segundo supuesto es un cambio no local del defecto. Pero recuérdese que aquí, sólo será tratado de manera exhaustiva el caso de defectos locales.

La señal podría cruzar el umbral debido a las fluctuaciones de luminancia del material, como consecuencia de su propia textura, incluso cuando no está presente ningún tipo de defecto local. El contraste entre el defecto y el fondo, es justamente el elemento esencial en este tipo de desarrollos. Las prestaciones de proceso de decisión se optimizarán en la medida de poder aumentar el contraste entre el fondo y el defecto, y en la elección adecuada del tipo de umbralización.

En la mayoría de las aplicaciones prácticas, las falsas alarmas tienden a distribuirse uniformemente sobre la superficie a inspeccionar. En cambio, los defectos al ser materia contigua tienden a formar grupos (*cluster*) de píxeles defectuosos. Parece pues, que píxeles aislados etiquetados como defectuosos, corresponderían con falsas alarmas, mientras que píxeles segmentados como defectuosos y que se agrupan bidimensionalmente serán buenos

candidatos. Esta propiedad puede ser utilizada como fase de post-procesamiento en la detección de los defectos.

Concluyendo, un sistema de detección de defectos locales podría estar formado por tres componentes básicos, tal como muestra la figura 4.4. Un primer bloque de realce de los defectos, cuya misión sea el aumento de contraste entre la zona defectuosa y el fondo. El segundo bloque corresponderá a la toma de decisión basada en la amplitud de la señal, operación no lineal e irreversible. Y el tercer bloque trataría de distinguir entre defecto y falsas alarmas, basándose en propiedades de continuidad de la materia y distribución uniforme de las falsas alarmas.



**Figura 4.4 Esquema general del proceso de detección**

Las actuaciones de los bloques están interaccionadas, no son bloques cuyos diseños puedan ser considerados como independientes. Por ejemplo, una acción de eliminación de componentes de altas frecuencias del espectro de la señal, producido en el primer bloque, reduciría la efectividad de la tercera etapa. El diseño óptimo de cada uno no es algo exacto sino que tiene componentes de ingenio, pues su formulación en términos formales no ha sido posible realizar. De esta manera surgen preguntas como ¿Cuál es el mejor filtro que aumente el contraste? ¿Qué umbral optimiza el compromiso entre falsas alarmas y ocultación de defectos? ¿Cuál es la técnica de *clustering* capaz de distinguir ruido de defecto?. No existe una respuesta general, todo va a depender del conocimiento del problema y de la habilidad del diseñador.

Los siguientes puntos van a versar sobre estos tres bloques, intentado responder de forma metodológica a las preguntas formuladas, para acabar con un criterio de medida sobre la eficacia del sistema detector.

## 4.2 Realce de los defectos locales

---

Los métodos de realce de defectos pueden estar basados en técnicas en el dominio espacial o frecuencial. No obstante, el procesamiento en el dominio de las frecuencias en inspección automatizada, no se puede contemplar el tratamiento en tiempo real desde el estado actual de la técnica<sup>1</sup>. Dichos mecanismos de procesamiento de imágenes, aunque potentes y versátiles, están reservados para implementaciones no críticas respecto al tiempo o en aplicaciones fuera de línea. Las instalaciones en línea, en general críticas en el tiempo de ejecución, no pueden permitirse realizar procesamiento frecuencial. Sin embargo, están apareciendo metodologías híbridas, haciendo uso de métodos ópticos - analógicos y conversión a imágenes digitales capaces de reducir los tiempos. Esta línea de trabajo novedosa y dentro del campo experimental, no ha sido contemplada en la realización de esta tesis. Sólo se van a contemplar métodos digitales basados en el dominio espacial.

Dentro del dominio espacial hay que distinguir entre técnicas pixel a pixel y técnicas en entornos de vecindad. Si bien las operaciones de procesamiento pixel a pixel son muy útiles para el realce de los defectos, pues éstas están íntimamente ligadas al rango dinámico de la señal, este tipo de proceder no ha sido objeto de estudio, mas en lo que pudiera contribuir para una mejora de calidad de las imágenes adquiridas. En cambio, sí se ha puesto énfasis en la investigación de las relaciones espaciales de píxeles en pequeños entornos de vecindad, al ser ésta la primera señal de reconocimientos de objetos en la imagen. Al tomar una imagen con defectos locales e iluminación uniforme en la escena, un cambio en la tendencia de los niveles de grises en un entorno de vecindad, permitirá detectar la presencia de faltas. Obviamente este proceder no es posible desde el procesamiento pixel a pixel.

El resultado de operaciones de vecindad es generar otra imagen, distinta a la adquirida, con el objetivo de aumentar el contraste entre fondo y defecto. Al procesar la imagen para realzar ciertas características, va a implicar una pérdida de la información original, por lo que también se suele llamar a las operaciones de vecindad filtros de procesamiento, en el sentido de transmitir una determinada parte del espectro de la señal.

Los filtros espaciales se clasifican en lineales y no lineales. Los filtros lineales están caracterizados por la convolución entre máscara e imagen, coincidiendo con la inversa de la transformada de Fourier del producto de ambas transformadas. Así son llamados filtros paso bajo, aquellos que permiten pasar las componentes de baja frecuencia y atenúan las componentes de alta frecuencia. Las componentes de alta frecuencia caracterizan discontinuidades luminosas en la imagen, como bordes o detalles finos. De igual forma las componentes de baja frecuencia se relacionan con distribuciones espaciales homogéneas.

---

<sup>1</sup> En 1998, la tarjeta Genesis de Matrox realiza una transformada discreta de Fourier 2D, en una imagen de 512x512 con 8 bits en 2 s aproximadamente

Concluyendo, un filtro paso bajo generará un suavizado de la imagen mientras un filtro paso alto servirá para la localización de bordes y de detalles en la imagen. Un tercer tipo de filtros son los llamados paso banda, eliminando las componentes de alta y baja frecuencia. Estos filtros son utilizados para la reconstrucción de imágenes y raramente para el realce.

Los filtros espaciales no lineales también operan en entornos de vecindad. En general, el procesado se basa en alguna característica de la vecindad, no utilizando explícitamente el uso de coeficientes de la máscara como en el procesado lineal. Por ejemplo, es común realizar una eliminación de ruido con la aplicación de una mediana en el entorno de vecindad. Otro ejemplo, puede ser el aumento del brillo de la imagen, mediante el reemplazamiento de pixel de mayor intensidad en la máscara. Todas estas operaciones de maximizado, mediana, etc. son operaciones no lineales.

Realizado este primer análisis sobre las posibilidades de realce de defectos, las siguientes páginas van a desarrollar, el análisis y síntesis de filtros espaciales lineales o no. No olvidando que el objetivo último es el aumento de contraste entre el defecto y el fondo. Primero se abordan las técnicas lineales para pasar luego a las no lineales.

#### 4.2.1 Filtros lineales discretos

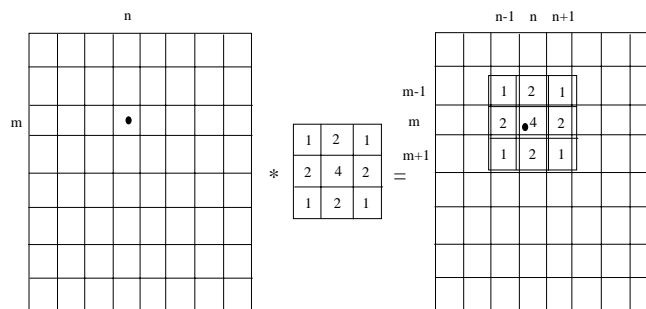
El procesamiento lineal se fundamenta en la combinación de píxeles mediante la multiplicación de cada pixel por un factor, para proseguir con la suma de los productos, escribiendo el resultado sobre el pixel que sirvió de pivote, ver figura 4.5. Desde el punto de vista matemático y considerando  $H$  el operador máscara y  $G$  la imagen, el resultado quedará como:

$$G' = H * G \quad g'_{m,n} = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} h_{k,l} g_{m-k,n-l} \quad (4.1)$$

obsérvese detenidamente este proceder, primero es una transformación lineal, segundo describe una operación de convolución discreta, reemplázese la integral por suma de elementos discretos y, tercero, una convolución discreta coincide con un filtro lineal discreto, por la propia definición que se ha dado. Estas ideas son la base del trabajo que se va a exponer a continuación. Parece evidente que los resultados de la imagen de salida dependerán del tipo y la forma de la convolución, por tanto el problema que se estudia, es de cómo se va a diseñar la máscara de convolución. Y por lo expresado se puede optar por dos vías, el diseño en el espacio temporal y en el basado en el espacio frecuencial, sabiendo además la correspondencia biunívoca entre estos dos espacios. A partir de estos momentos se hablará de filtros o máscaras indistintamente.

Antes de entrar en detalle sobre el análisis y diseño de las máscaras, véanse algunas consideraciones prácticas. Desde el punto de vista teórico y por lo mencionado anteriormente, se desprende la no existencia de límites en el tamaño de la máscara de convolución. Pero en la práctica dos problemas hay que considerar, el primero y más importante, a medida de que se tenga máscaras de mayor tamaño, más grande será el esfuerzo computacional, por lo que se deberá emplear máscaras de la menor extensión

posible. El segundo problema es el efecto de bordes y ruptura del teorema de convolución. La adquisición práctica de una imagen en un *buffer* de memoria, supone una discontinuidad en la convolución al carecer de información más allá de las fronteras de la imagen. Con el objeto de evitar este inconveniente, se suelen utilizar bien *buffers* de procesamiento más pequeños que el adquirido o bien, utilizar técnicas llamadas *overscan*, consistentes en dar un valor fijo determinado o la media de los que tiene, emplazando los valores fuera de las fronteras por las calculadas. Todo ello lleva a utilizar máscaras lo más pequeñas posible, con el objeto de disminuir el número de operaciones y evitar las discontinuidades originadas por la falta de datos en las fronteras. Se trata pues de buscar filtros potentes y flexibles con el menor número de operaciones.



**Figura 4.5 Operación de convolución discreta con máscara 3x3**

Dentro de este apartado se va hacer el siguiente planteamiento: primero se van a estudiar las propiedades de las máscaras, mediante el uso del dominio de las frecuencias, de las que se van a desprender un conjunto de propiedades a tener en cuenta para la fase de diseño; segundo, se desarrolla la relación existente entre convolución y correlación, y tercero, se expone, como proceso de síntesis, la utilización del método de regresión de variable cualitativa para el diseño de máscaras.

#### 4.2.1.1 FIR e IIR

Hay dos tipos de filtros, los filtros no recursivos llamados FIR (*finite impulse response*) y los filtros recursivos bajo el nombre de IIR (*infinite impulse response*). Para sus estudios se empezará por abordar el caso de filtros unidimensionales. La función de transferencia de un filtro de tipo FIR, en transformadas en 'z' y su ecuación en diferencias es del tipo:



$$F(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}$$

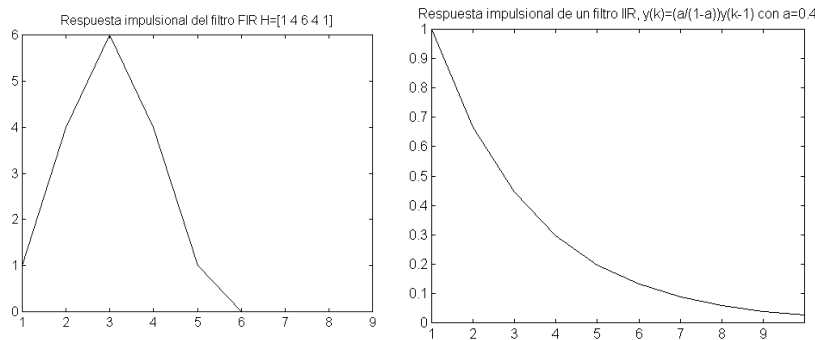
$$y(k) = a_0 x(k) + a_1 x(k-1) + \dots + a_n x(k-n) \quad (4.2)$$

donde  $n$  es el orden del filtro. Obsérvese que en estos tipos de filtros cada valor de la secuencia de salida sólo depende del número finito de valores de la secuencia de entrada. En cambio, las expresiones de los filtros recursivos corresponden a la forma de:

$$F(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}, n \geq m$$

$$y(k) = \frac{1}{b_0} [a_0 x(k) + a_1 x(k-1) + \dots + a_m x(k-m) - b_1 y(k-1) - \dots - b_n y(k-n)] \quad (4.3)$$

en estos casos, las secuencias de salida dependen tanto de la entrada como de la salida. De estas ecuaciones se deducen las siguientes propiedades, primero la respuesta impulsional es infinita para los filtros IIR, aun teniendo un número finito de coeficientes. Mientras la respuesta impulsional de un filtro no recursivo es siempre finita e igual al tamaño de la máscara (figura 4.6). En segundo lugar, los FIR son siempre estables, esto es, el resultado del filtrado es otro valor finito. No es el caso de los filtros recursivos, su estabilidad depende de los coeficientes. La estabilidad de los filtros recursivos es muy difícil de analizar y especialmente cuando es de dos o más dimensiones [Jähne97]. Tercera, cualquier filtro recursivo puede ser reemplazado por otro no recursivo con infinitos coeficientes, sus valores vendrán dados por la respuesta impulsional del IIR. La conclusión inversa no se cumple, sólo hay que observar en la inestabilidad de los IIR y la estabilidad siempre de los FIR.



**Figura 4.6 Respuesta impulsionales de FIR, IIR**

#### 4.2.1.2 Propiedades de los filtros lineales discretos

Antes de entrar en el análisis de máscaras, se van a comentar sucintamente las propiedades de los filtros lineales. Éstas, luego, serán utilizadas para el diseño de las máscaras de convolución. Se denotará la máscara como el operador  $H$ , el cual transforma

una imagen  $G$  en  $G'$ . En este apartado se van a tratar las propiedades del operador  $H$ , para llegar a que éste cumple con las características de linealidad e invarianza a traslaciones.

El operador  $H$  tiene la propiedad conmutativa, esta propiedad es fácil de demostrar en el dominio de la frecuencia.

$$H' * H = H * H' \quad (4.4)$$

También tiene la propiedad asociativa, pudiendo componer un operador complejo a partir de operadores simples

$$H * (H' * H'') = (H * H') * H'' \quad (4.5)$$

por ejemplo, en vez de utilizar un filtro binomial de  $5 \times 5$ , llevando 25 multiplicaciones y 24 sumas, éstas podrían ser reducidas por la propiedad asociativa a 10 multiplicaciones y 8 sumas

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} * (1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1) \quad (4.6)$$

además al estar el operador  $H$  constituido por elementos de un mismo espacio vectorial, se puede aplicar la propiedad distributiva respecto a la suma

$$H' + H'' = H \quad (4.7)$$

#### 4.2.1.2.1 Linealidad e invarianza a traslaciones

El operador  $H$  tiene la propiedad de linealidad, así a dos imágenes,  $G$  y  $G'$  de tamaño  $P \times Q$ , al ser operadas con dos escalares cualesquiera,  $a$  y  $b$ , cumple con la siguiente igualdad:

$$H * (aG + bG') = aH * G + bH * G' \quad (4.8)$$

que puede generalizarse para cada una de las entradas

$$H\left(\sum_k a_k G_k\right) = \sum_k a_k H G_k \quad (4.9)$$

La propiedad de superposición hace que el operador sea lineal. Esta propiedad es muy útil al poder descomponer la imagen por cada una de las componentes que la constituyen. Formalmente, esto significa que la imagen es compuesta a través de una imagen base, de manera que se puede escribir:

$${}^{mn}P = \begin{cases} 1 & m, n \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$G = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} G_{mn} {}^{mn}P \quad (4.10)$$

mostrándose el operador P como una función discreta dirac en 2D. Otra importante propiedad es la invarianza a traslaciones, esto es, el resultado del operador no depende explícitamente de la posición de la imagen. Si se traslada en posición, la imagen de salida es la misma pero desplazada. Se puede formular mediante el operador desplazamiento,  ${}^{mn}S$ , como que cumple con:

$${}^{mn}S g_{m',n'} = g_{m'-m, n'-n} \quad (4.11)$$

El operador es invariante a cambios, al conmutar el operador H por el operador desplazamiento :

$$H({}^{mn}S G) = {}^{mn}S (H G) \quad (4.12)$$

obsérvese que el operador desplazamiento  ${}^{mn}S$ , también es un operador lineal e invariante a cambios.

#### 4.2.1.3 Simetría

La simetría de las máscaras tanto en tamaño como en coeficiente es una propiedad muy utilizada en la práctica y, preferentemente se suelen utilizar máscaras de tamaño impar. La convolución de una máscara de tamaño impar y centrada en el origen de ésta, vendrá dado por:

$$g'_{m,n} = \sum_{k=-r}^r \sum_{l=-r}^r h_{-k,-l} g_{m+k, n+l} \quad (4.13)$$

Las asimetrías de los coeficientes de las máscaras no son utilizadas para el procesamiento de imágenes, ya que producen traslaciones en la estructura de la imagen. Un filtro simétrico transforma las características del entorno de vecindad, pero no cambia su

centro de gravedad [Jähne97]. Si se hacen traslaciones en los píxeles, no serán posibles las medidas de posición de los píxeles. Y ésta es una característica importante en los equipos de inspección.

Se puede distinguir dos tipos de simetría, par e impar, con la condición de cumplir en una o en más direcciones, las siguientes igualdades:

$$h_{-k,l} = \pm h_{k,l} \quad \text{o} \quad h_{k,-l} = \pm h_{k,l} \quad (4.14)$$

donde el signo + y - hace referencia a simetría par o impar. Desde esta definición y para el caso de un filtro unidimensional, la expresión (4.13) quedará como:

$$\begin{aligned} g'_{m,n} &= h_0 g_{m,n} + \sum_{l=1}^r h_l (g_{m,n-l} + g_{m,n+l}) \quad \text{par} \\ g'_{m,n} &= \sum_{l=1}^r h_l (g_{m,n-l} - g_{m,n+l}) \quad \text{impar} \end{aligned} \quad (4.15)$$

La suma sólo recorrerá la mitad de la máscara, excluyendo el pixel central, al cual habrá de tratar aparte. En el caso de filtro impar, por la definición dada en (4.14), el coeficiente del pixel central debe ser cero. Para el caso de máscaras bidimensionales, las simetrías pueden ser diferentes por cada dirección. En el caso de imágenes bidimensionales existen cuatro tipos de direcciones principales: de abajo arriba, de izquierda a derecha, de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha y, de la esquina superior derecha a la esquina inferior izquierda. Las expresiones de la convolución dependerán de las diferentes simetrías que se den en cada una de estas direcciones.

Sea ahora el caso más general, es decir, se considera una convolución constituida por un filtro IIR y FIR, las imágenes resultantes serán del tipo:

$$g'_{m,n} = \sum_{m'=0}^k \sum_{n'=0}^l r_{m',n'} g'_{m',n'} + \sum_{m'=-r}^r \sum_{n'=-r}^r h_{m',n'} g_{m-m',n-n'} \quad (4.16)$$

donde los primeros sumandos corresponden al IIR, cuyos coeficientes son tomados del primer cuadrante, exceptuando el origen. Tal restricción es necesaria, al considerar en el algoritmo recursivo sólo los píxeles ya calculados. El signo de los índices (m',n') determinarán la dirección en el que es aplicado el filtro recursivo. Los segundo sumandos representan el FIR de máscara (2r+1) (2r+1).

Las funciones de transferencia de los filtros IIR no suelen ser simétricas, más bien tienden a la dirección de propagación del algoritmo recursivo. Si se requiere el diseño de filtros simétricos, debe ejecutarse el mismo filtro en todas las direcciones, o al menos en sentidos contrarios, sumándose o restándose los distintos resultados. De esta forma las asimetrías pueden ser compensadas, unas con otras.

Para el caso de los filtros FIR, se puede hacer uso de la propiedad asociativa para el diseño de máscaras que fuesen simétricas en las cuatro direcciones.

#### 4.2.1.4 Respuesta en frecuencia

En el dominio de la frecuencia, un filtro se representa por su respuesta espectral. Ésta mostrará como cambia la amplitud y fase del filtro en función de la  $k$ -ésima componente de frecuencia. La relación entre el dominio frecuencial y espacial vendrá dado por la transformada discreta de Fourier. La transformada del operador  $H$ , omitiendo el factor  $1/MN$  para una representación normalizada, será:

$$h_{u,v} = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N h_{m,n} \exp\left(-\frac{2\pi jmu}{M}\right) \exp\left(-\frac{2\pi jnv}{N}\right) \quad (4.17)$$

Esta expresión puede ser simplificada si se aplican propiedades de simetrías par e impar. La combinación de los términos simétricos  $h_{m,n}$  y de  $h_{M-m,N-n}$  quedará como:

$$h_{u,v} = h_{0,0} + \sum_{(m,n) \in D_h} \sum \left[ h_{m,n} \exp\left(-\frac{2\pi jmu}{M}\right) \exp\left(-\frac{2\pi jnv}{N}\right) + h_{M-m,N-n} \exp\left(\frac{2\pi jmu}{M}\right) \exp\left(\frac{2\pi jnv}{N}\right) \right] \quad (4.18)$$

donde  $D_h$  es el conjunto de índices que recorre la mitad del espacio. Usando las características de filtros pares e impares, se desprenden las siguientes expresiones

$$h_{u,v} = h_{0,0} + \sum_{(m,n) \in D_h} \sum 2h_{m,n} \cos\left(\frac{2\pi mu}{M} + \frac{2\pi nv}{N}\right) \quad \text{par}$$

$$h_{u,v} = j \sum_{(m,n) \in D_h} \sum 2h_{m,n} \sin\left(\frac{2\pi mu}{M} + \frac{2\pi nv}{N}\right) \quad \text{impar} \quad (4.19)$$

estas ecuaciones se pueden escribir de manera que también quede normalizado el eje de las abscisas, o sea, la frecuencia, de forma que se cambie a  $\tilde{K} = (2u/M, 2v/N)$ , estando su rango entre  $-1$  y  $1$ . Las expresiones quedarán:

$$h_{u,v} = h_{0,0} + \sum_{(m,n) \in D_h} \sum 2h_{m,n} \cos[\pi(m\tilde{k}_1 + n\tilde{k}_2)] \quad \text{par}$$

$$h_{u,v} = j \sum_{(m,n) \in D_h} \sum 2h_{m,n} \sin[\pi(m\tilde{k}_1 + n\tilde{k}_2)] \quad \text{impar} \quad (4.20)$$

Como se verá más adelante, estas expresiones van a ser muy utilizadas para el análisis y diseño de las máscaras de convolución.

## 4.2.2 Convolución y correlación espacial

En el apartado anterior ha quedado clara la necesidad de utilizar máscaras simétricas, con el objeto de no introducir traslaciones espaciales en los centros de gravedad del entorno de vecindad. Pero existe otra propiedad más a estudiar, la coincidencia entre el concepto de convolución discreta y correlación espacial. Así, se define la correlación entre una imagen  $G$  discreta y un operador  $H$  como:

$$g'_{m,n} = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} h_{k,l} g_{m+k,n+l} \quad (4.21)$$

Si se compara esta expresión con la definida en la convolución discreta, ( 4.1 ), se observará que sólo difiere en los signos de los índices. De hecho, en el dominio de las frecuencias sus transformadas coinciden en módulo pero no en argumento:

$$\begin{aligned} G * H &\xrightarrow{DFT} \hat{G}\hat{H} \\ correlacion(GH) &\xrightarrow{DFT} \hat{G}^* \hat{H} \end{aligned} \quad (4.22)$$

En el caso de cumplir el operador  $H$  simetría par, la convolución y la correlación coinciden. Mientras en simetría impar es igual en módulo pero de signo contrario. Sea por ejemplo el caso de una máscara unidimensional simétrica  $H$ , al que se le pasa por la imagen  $G$  para determinar su correlación. Al aplicar simetría par e impar sobre ( 4.21 ) resultará:

$$\begin{aligned} g'_{m,n} &= h_0 g_{m,n} + \sum_{l=1}^r h_l (g_{m,n-l} + g_{m,n+l}) \quad \text{par} \\ g'_{m,n} &= \sum_{l=1}^r H_l (g_{m,n+l} - g_{m,n-l}) \quad \text{impar} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Obsérvese que las expresiones ( 4.23 ) y ( 4.15 ) son iguales para simetría par y con distinto signo en simetría impar. Esta propiedad ha sido utilizada por los fabricantes de *hardware* de procesamiento de imágenes para el diseño de sus tarjetas[Awcoc95].

### 4.2.2.1 Regresión múltiple

Se ha observado cómo bajo ciertas condiciones de simetría, la convolución coincide con la correlación lineal. En todo caso, para cualquier caso de convolución discreta del operador  $H$  sobre una imagen  $G$ , esta operación puede ser presentada como una combinación lineal de un vector  $H^*$  por una matriz  $G^*$ . Véase, partiendo de la definición dada de convolución:

$$g'_{m,n} = \sum_{k=-r}^r \sum_{l=-r}^r h_{-k,-l} g_{m+k,n+l} \quad (4.24)$$

Si se tiene un operador  $H$  de  $(2r+1) \times (2r+1)$  y una imagen  $G$  de  $P \times Q$  píxeles, el vector  $H^*$  estará constituido por todos los coeficientes del operador máscara  $H$ , esto es, será un vector columna de  $(2r+1) \times (2r+1)$  filas, mientras  $G^*$  será una matriz formada por  $P \times Q$  filas y  $(2r+1) \times (2r+1)$  columnas, quedando como:

$$G^{*'} = G^* H^* \quad (4.25)$$

donde  $G^{*'}$  representará el vector de salida correspondiente al resultado de la convolución. El motivo de cambiar el aspecto, viene originado por tratar de presentar el diseño de las máscaras como un problema de regresión múltiple. Si se utiliza notación de Análisis multivariante, a  $G^*$  se la llama la matriz de diseño, mientras que  $H^*$  será el vector de parámetros. Según el modelo lineal presentado:

$$g_i^{*'} = g_{i1}^* h_1^* + \dots + g_{i,(2r+1)(2r+1)}^* h_{(2r+1)(2r+1)}^* \quad (4.26)$$

y suponiendo que  $(2r+1) \times (2r+1)$  sea menor a  $P \times Q$ , hace que el rango de  $G^*$  sea de  $(2r+1) \times (2r+1)$ . Desde el punto de vista de la regresión múltiple, la solución de los coeficientes de la máscara puede ser calculado mediante mínimos cuadrados. La solución está definida por:

$$(\hat{h}_1^*, \dots, \hat{h}_{(2r+1)(2r+1)}^*)^T = (G^{*T} G^*)^{-1} G^{*T} G^{*'} \quad (4.27)$$

es decir, la máscara  $H$  puede ser estimada mediante el uso de la matriz de diseño,  $G^*$ , y el nivel deseado de salida,  $G^{*'}$ . Antes de entrar en mayor detalle en la fase de diseño, véanse más conceptos relacionados con la regresión. Así, se define a la relación lineal

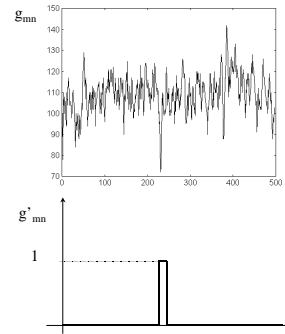
$$\hat{g}_i^{*'} = g_{i1}^* \hat{h}_1^* + \dots + g_{i,(2r+1)(2r+1)}^* \hat{h}_{(2r+1)(2r+1)}^* \quad (4.28)$$

hiperplano de regresión de  $G^{*'}$  sobre  $G^*$ . Y se llama correlación múltiple al coeficiente de correlación entre las variables  $G^{*'}$  y  $\hat{G}^{*'}$ . Se indica por

$$r_{g_i}^* = \text{corr}(g_i^{*'}, \hat{g}_i^{*'}) \quad (4.29)$$

Si  $r_g^*$  es igual a 1, entonces el valor estimado y el verdadero valor coinciden,  $g^{*'}$  =  $\hat{g}^{*'}$ , es decir la variable  $g^{*'}$  es combinación lineal de  $g^*$ , mientras que si  $r_g^*$  es igual a cero,  $g^{*'}$  no es combinación lineal de  $g^*$ . Obviamente  $g^{*'}$  es combinación lineal de  $g^*$  por la propia definición dada en (4.25). Todo este repaso al análisis de regresión, sirve para ver cómo la máscara de convolución puede ser calculada desde la búsqueda de correlación entre máscara y la forma del defecto que se desea detectar. Éste es el fundamento de

muchos algoritmos de casamiento de patrones (*pattern matching*). Pero en este caso, no se pretende exactamente encontrar un patrón, sino el realce de defectos puntuales, esto es, aumentar el contraste entre el fondo y el defecto. En la figura 4.7 se expresa lo que se pretende conseguir, suponiendo un caso unidimensional. Pues bien, en el modelo de regresión no se tiene conocimiento a priori cuantitativo del resultado, esto es, no se sabe cuanto debe valer  $g'_{m,n}$ , pero si se sabe que se desea aumentar la diferencia entre fondo y contraste, lo que sugiere realizar un modelo de regresión con variable de respuesta cualitativa.



**Figura 4.7 Realce de defecto con variables cualitativas**

### 4.2.3 Modelo de regresión con variables cualitativas

La variable respuesta en muchas investigaciones es binaria: por ejemplo, un accidente puede o no ocurrir, un crédito devolverse o no. De igual forma, la salida del proceso de convolución no es conocida a priori, pero si es posible indicar si el pixel es defectuoso o no, implicando un resultado binario. Efecto que fue mostrado en la anterior gráfica. Una solución estaría en formular el modelo de regresión y estimarlo mediante mínimos cuadrados:

$$G^{*'} = G^* H^* + u$$

$$\left( \hat{h}_1^*, \dots, \hat{h}_{(2r+1)(2r+1)}^* \right)^T = (G^{*T} G^*)^{-1} G^{*T} G^{*'} \quad (4.30)$$

donde  $u$  es el residuo. Suponiendo  $g_i^{*'}$  como una variable binaria, se procederá a dar valor nulo cuando un pixel corresponde al fondo, y valor uno en las áreas de píxeles defectuosas. Este procedimiento se encuentra con los inconvenientes siguientes:

1. Tomando esperanzas en (4.30) para  $G^* = G_i^*$ :

$$E[g_i^{*'} | G^* = G_i^*] = G^* \hat{H}^* \quad (4.31)$$

si se llama  $p_i$  a la probabilidad de que  $g_i^{*'}$  tome en la población el valor 1 cuando  $G^* = G_i^*$ , entonces la esperanza de la variable de salida quedará como:



$$p_i = p(g^{*'} = 1 | G = G_i^*)$$

$$E[g^{*'} | G^* = G_i^*] = p(g^{*'} = 1)1 + p(g^{*'} = 0)0 = p_i = G^* \hat{H}^* \quad (4.32)$$

En consecuencia, la predicción de  $g^{*'}$  del modelo estima la probabilidad de que la observación pertenezca a la clase definida por  $g^{*'}=1$ . Sin embargo, un inconveniente fundamental con esta formulación es que, aunque  $p_i$  debe estar entre cero y uno, no hay ninguna garantía de que su predicción,  $G^* \hat{H}^*$ , verifique esta restricción, por lo que puede prever probabilidades mayores de la unidad.

2. Conocido el valor de  $G^*$ , los únicos valores posibles de  $g^{*'}$  son 0 y 1. Por tanto, la distribución de  $u_i$  es una distribución discreta con valores  $(1-p_i)$  y  $-p_i$ . La variable  $u_i$  tiene media cero, pero no sigue una distribución normal. En consecuencia, los estimadores mínimos cuadrados del modelo no serán eficientes [Peña87].

#### 4.2.3.1 El modelo logístico (Logit)

La forma de garantizar que la respuesta prevista esté entre cero y uno es transformar la variable respuesta, lo que equivale a establecer una relación no lineal entre la salida y la variable de entrada. Formulando el modelo de manera que la probabilidad de pertenecer al grupo definido por  $G^{*'}$  igual a 1 sea una función no lineal de  $G^*$  del tipo:

$$p_i = F(G_i^* H^*) \quad (4.33)$$

donde  $F$  es cualquier función de distribución, garantizando que, sea cual sea el valor de  $G^* \hat{H}^*$ , el valor de probabilidad estará entre cero y uno. Existen varias funciones, pero la transformación más utilizada corresponde con el modelo logístico (logit), dada por:

$$p_i = \frac{1}{1 + e^{-G_i^{*T} H^*}} \quad (4.34)$$

siendo ésta una función sigmoide, definida entre cero y uno.

Partiendo de una muestra caracterizada por una imagen transformada  $G^*$ , cuya salida es un vector binario  $G^{*'}$ . La función de probabilidad de una respuesta  $g^{*'}$  cualquiera es:

$$P(g_i^{*'}) = p_i^{g_i^{*'}} (1 - p_i)^{1-g_i^{*'}} \quad g_i^{*'} = 0,1 \quad (4.35)$$

Por tanto, la función de probabilidades para la muestra es:

$$P(g_1^*, \dots, g_{PxQ}^*) = \prod_{i=1}^{PxQ} p_i^{g_i^*} (1 - p_i)^{1 - g_i^*} \quad (4.36)$$

y tomando logaritmos:

$$\ln(P(g_1^*, \dots, g_{PxQ}^*)) = \sum_{i=1}^{PxQ} g_i^* \ln\left(\frac{p_i}{(1 - p_i)}\right) + \sum_{i=1}^{PxQ} \ln(1 - p_i) \quad (4.37)$$

expresando  $p_i$  en función de los parámetros de interés  $\hat{H}^*$  se obtendrá su función soporte:

$$L(\hat{H}) = \sum_{i=1}^{PxQ} g_i^* G_i^{*T} \hat{H} - \sum_{i=1}^{PxQ} \ln(1 + e^{G_i^{*T} \hat{H}}) \quad (4.38)$$

ya que, según (4.34):

$$1 - p_i = \frac{1}{1 + e^{G_i^{*T} \hat{H}}} \quad (4.39)$$

Para obtener los estimadores máximos verosímiles, se deriva (4.38) expresando el resultado como vector columna:

$$\frac{\partial L(\hat{H}^*)}{\partial \hat{H}^*} = \sum_{i=1}^{PxQ} g_i^* G_i^* - \sum_{i=1}^{PxQ} G_i^* \left( \frac{e^{G_i^{*T} \hat{H}^*}}{1 + e^{G_i^{*T} \hat{H}^*}} \right) = 0 \quad (4.40)$$

que conduce al sistema de ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^{PxQ} g_i^* G_i^* = \sum_{i=1}^{PxQ} G_i^* \left( \frac{e^{G_i^{*T} \hat{H}^*}}{1 + e^{G_i^{*T} \hat{H}^*}} \right) \quad (4.41)$$

Estas ecuaciones expresan que el producto de los valores observados por las variables explicativas debe ser igual al de los valores previstos. También, que los residuos del modelo,  $e_i = g_i^* - \hat{g}_i^*$ , deben ser ortogonales a las variables de entrada. La condición (4.41) es análoga a la obtenida en el modelo de regresión estándar, pero ahora el sistema resultante no es lineal en los parámetros  $\hat{H}^*$ . Para obtener el valor MV de  $\hat{H}^*$  que maximiza la función soporte, (4.40), se recurre a un algoritmo tipo Newton-Raphson.

Desarrollando  $(\partial L(\hat{H}^*)/\partial \hat{H}^*)$ , el vector de tasas de discriminación alrededor de un punto, se tiene

$$\frac{\partial L(\hat{H}^*)}{\partial \hat{H}^*} = \frac{\partial L(\hat{H}_k^*)}{\partial \hat{H}^*} + \frac{\partial^2 L(\hat{H}_k^*)}{\partial \hat{H}^* \partial \hat{H}^{*T}} (\hat{H}^* - \hat{H}_k^*) \quad (4.42)$$

para que el punto corresponda al máximo de verosimilitud su primera derivada debe anularse. Imponiendo la condición  $(\partial L(\hat{H}^*)/\partial \hat{H}^*) = 0$ , se obtiene:

$$\hat{H}_k^* = \hat{H}^* + \left( -\frac{\partial^2 L(\hat{H}_k^*)}{\partial \hat{H}^* \partial \hat{H}^{*T}} \right)^{-1} \frac{\partial L(\hat{H}_k^*)}{\partial \hat{H}^*} \quad (4.43)$$

que expresa cómo obtener el punto  $\hat{H}_k^*$  del máximo a partir de un punto próximo cualquiera  $\hat{H}^*$ . La ecuación depende de la matriz de segundas derivadas, que, en el óptimo, es la inversa de la matriz de varianzas y covarianzas asintótica de los estimadores MV. Derivando por segunda vez en (4.40) y sustituyendo las derivadas de primer y segundo orden en (4.43), queda:

$$\hat{H}_k^* = \hat{H}^* + (G^{*T} V G^*)^{-1} G^{*T} (G^{*'} - \hat{G}^{*'}) \quad (4.44)$$

donde V es una matriz diagonal con términos  $p_i(1-p_i)$ , mientras  $\hat{G}^{*'}$  es el vector de valores esperados de  $G^{*'}$ . Esta expresión proporciona el siguiente algoritmo iterativo para obtener el estimador MV de  $\hat{H}^*$ .

1. Fijar un valor arbitrario inicial,  $\hat{H}_0^*$ , para los parámetros y obtener el vector  $\hat{G}_0^{*'}$  para dicho valor en el modelo logit.
2. Definir una variable auxiliar  $Z = \hat{V}^{-1} (G^{*'} - \hat{G}^{*'})$ .
3. Estimar por mínimos cuadrados ponderados una regresión con variable dependiente Z, regresores  $G^*$  y coeficientes de ponderación  $g_i^{*'}(1-g_i^{*'})$ . Los parámetros estimados con esta regresión, vendrán dados por  $(G^{*T} \hat{V} G^*)^{-1} G^{*T} (G^{*'} - \hat{G}^{*'})$ . Obtener un nuevo estimador de los parámetros utilizando el resultado de la etapa anterior, quedando la expresión:

$$\hat{H}_k^* = \hat{H}_{k-1}^* + (G^{*T} \hat{V}_{k-1} G^*)^{-1} G^{*T} (G^{*'} - \hat{G}_{k-1}^{*'}) \quad (4.45)$$

El proceso se repite hasta obtener la convergencia. De esta forma es posible obtener los coeficientes de los filtros lineales discretos. Se ha transformado el problema de realce en una búsqueda de la correlación entre la máscara y la forma de los defectos.

#### 4.2.4 Filtros no lineales: Procesamiento morfológico

Dentro de los filtros no lineales destacan las técnicas basadas en procesamiento morfológico. El impulso del procesamiento morfológico sobre imágenes ha sido desarrollado principalmente por Georges Matheron[Mathe75] y Jean Serra [Serra82]. La Morfología matemática se concentra en el análisis de formas en una imagen. La teoría general, desarrollada inicialmente, se restringió a imágenes binarias, siendo más reciente su aplicación en imágenes de niveles de gris. Las referencias [Dough92] y[Dough94] tratan de forma didáctica este tema.

El procesamiento morfológico de imágenes constituye en la actualidad una importante herramienta para el análisis de imágenes con formas predefinidas. Actualmente, estas operaciones resultan ser los procesamiento no lineales más empleados en la Visión artificial, y la mayoría de las tarjetas de procesamiento de imágenes permiten la realización en tiempo real de los operadores más básicos.

Para entender la filosofía de trabajo de los filtros morfológicos, se inicia a través de su definición para imágenes binarias y se ampliará el concepto posteriormente a la morfología sobre escalas de grises.

##### 4.2.4.1 Procesamiento morfológico en imágenes binarias

La idea básica en imágenes binarias es la de recorrer la imagen a procesar  $G$  con una máscara  $H$ , denominado elemento estructurante, que posee un origen como referencia y dónde la pertenencia de un punto a una imagen transformada, se decide comprobando si los conjuntos de  $H$  y  $G$  verifican una determinada condición. Aquellos puntos  $g_{m,n}$  en los que la respuesta sea afirmativa pasarán a formar parte de la imagen transformada.

Con imágenes binarias, las combinaciones de píxeles vecinos vendrán dadas por operaciones basadas en el Álgebra de Boole. Así, se puede empezar definiendo una posible convolución binaria tal que reemplace la multiplicación por el operador lógico *and*, y la suma por el operador *or*, el resultado quedará como:

$$g'_{m,n} = \bigcup_{m'=-r}^r \bigcup_{n'=-r}^r h_{m'n'} \cap g_{m-m',n-n'} \quad (4.46)$$

Los símbolos  $\cap$  y  $\cup$  representan las operaciones lógicas *and* y *or*, respectivamente. La imagen binaria  $G$  ha sido convolucionada por el elemento estructurante  $H$ , de tamaño  $2r+1 \times 2r+1$ .

Si se asume que todos los elementos de  $H$  son ‘unos’, al operar según (4.46), si al menos un pixel de la imagen  $G$  es ‘uno’, en la zona que está incluida la máscara, el resultado de la operación será un ‘uno’, en caso contrario resultará ‘cero’. Por lo tanto el objeto ha sido dilatado. Pequeños agujeros o fracturas serán llenados, mientras el contorno de los objetos pasarán a ser suavizados. El operador definido por (4.46) se llama operador dilatación.

Con propósito opuesto se puede definir el operador erosión. Los objetos que sean más pequeños que la máscara desaparecerán completamente, mientras grupos de píxeles conectados por puentes serán separados. La erosión de un objeto estará definida por la siguiente convolución binaria:

$$g'_{m,n} = \bigcap_{m'=-r}^r \bigcap_{n'=-r}^r h_{m'n'} \cap g_{m-m',n-n'} \quad (4.47)$$

Se ha utilizado esta notación no convencional del procesamiento morfológico para transitar fácilmente del procesado lineal al no lineal. Normalmente estas operaciones son definidas sobre la teoría de conjuntos. Así, se considera  $G$  como el conjunto de todos los posibles píxeles de la matriz que sean distintos de cero.  $H$  es el conjunto de píxeles distinto de cero del elemento estructurante. Con  $H_p$  se denota la traslación de la máscara respecto al píxel  $p$ , pues no necesariamente el centro de la máscara es donde pivota el elemento estructurante. La erosión se definirá como:

$$G \ominus H = \{p : H_p \subseteq G\} \quad (4.48)$$

y la dilatación como:

$$G \oplus H = \{p : H_p \cap G \neq \emptyset\} \quad (4.49)$$

estas definiciones son equivalentes a (4.47) y (4.46) respectivamente. Según (4.48), la erosión sobre  $G$  con el elemento estructurante  $H$  da como resultado todos los píxeles  $p$ , para los cuales  $H_p$  está completamente contenido en  $G$ . Por el contrario, la dilatación de  $G$  por  $H$  es el conjunto de todos los píxeles para los cuales la intersección de  $G$  y  $H_p$  no es el conjunto vacío. Los operadores dilatación y erosión son considerados como los operadores elementales de la morfología, pudiéndose construir operadores más complejos a partir de éstos.

#### 4.2.4.1.1 Propiedades

Los operadores morfológicos no comparten todas las propiedades de las convoluciones lineales, vistas en 4.2.1.

**Invariante a traslaciones:** Viene como consecuencia directa de la definición de erosión y dilatación como convolución binaria. Utilizando el operador traslación  ${}^m S$  y para cualquier operación morfológica queda:

$$H({}^m S G) = {}^m S (H G) \quad (4.50)$$

**Superposición:** Con cualquier operador morfológico y para las siguientes expresiones

$$H(G \cup G') = (HG) \cup (HG') \quad H(G \cap G') = (HG) \cap (HG') \quad (4.51)$$

En términos generales, los operadores morfológicos no son aditivos en el sentido de (4.51). Mientras el operador dilatación cumpliría con el principio de superposición, la erosión no cumple. La erosión de la unión de dos objetos es un superconjunto de la unión de los dos objetos erosionados:

$$\begin{aligned} (G \cup G') \ominus H &\supseteq (G \ominus H) \cup (G' \ominus H) \\ (G \cup G') \oplus H &= (G \oplus H) \cup (G' \oplus H) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Conmutativa y asociativa: Los operadores morfológicos son generalmente no conmutativos

$$\begin{aligned} H_1 \ominus H_2 &\neq H_2 \ominus H_1 \\ H_1 \oplus H_2 &= H_2 \oplus H_1 \end{aligned} \quad (4.53)$$

Es fácil de entender que la erosión no es conmutativa para el caso especial de que  $H_1 \supset H_2$ , la erosión de  $H_2$  por  $H_1$  será el conjunto vacío, pero el caso contrario no lo es. Sin embargo, las aplicaciones consecutivas de erosiones y dilataciones sobre una misma imagen son conmutativas:

$$\begin{aligned} (G \ominus H_1) \ominus H_2 &= G \ominus (H_1 \oplus H_2) = (G \ominus H_2) \ominus H_1 \\ (G \oplus H_1) \oplus H_2 &= G \oplus (H_1 \oplus H_2) = (G \oplus H_2) \oplus H_1 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Estas conclusiones son muy importantes para la implementación del procesamiento morfológico. Generalmente, las operaciones en cascadas con  $k$  elementos estructurantes  $H_1, H_2, \dots, H_k$  son equivalentes a la operación con un único elemento estructurante  $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_k$ . Concluyendo, un elemento estructurante grande puede ser descompuesto en otros más pequeños. Un importante ejemplo es la composición del elemento estructurante en filas y columnas,  $H = H_x \oplus H_y$ . Otro ejemplo, es la realización de un elemento estructurante de tipo circular, éste podría construirse mediante la combinación de elementos estructurantes unidimensionales que corran en más direcciones que las axiales.

Monótonas: La erosión y la dilatación son operadores monótonos

$$\begin{aligned} G_1 \subseteq G_2 \quad G_1 \oplus H &\subseteq G_2 \oplus H \\ G_1 \subseteq G_2 \quad G_1 \ominus H &\subseteq G_2 \ominus H \end{aligned} \quad (4.55)$$

La propiedad de ser monótonas la erosión y la dilatación, significa que las relaciones de subconjuntos son invariantes a estos operadores.

Distributiva: Las propiedades distributivas para la dilatación y la erosión son más complejas que en los filtros lineales. Así, la erosión es distributiva con la intersección, mientras la dilatación sobre la unión.

$$\begin{aligned}(G_1 \cap G_2) \oplus H &\subseteq (G_1 \oplus H) \cap (G_2 \oplus H) \\ (G_1 \cap G_2) \ominus H &= (G_1 \ominus H) \cap (G_2 \ominus H)\end{aligned}\quad (4.56)$$

y

$$\begin{aligned}(G_1 \cup G_2) \oplus H &= (G_1 \oplus H) \cup (G_2 \oplus H) \\ (G_1 \cup G_2) \ominus H &\subseteq (G_1 \ominus H) \cup (G_2 \ominus H)\end{aligned}\quad (4.57)$$

Dualidad: La erosión y la dilatación son operadores duales. Tomando la imagen negada  $G$ , la erosión se convierte en una dilatación y viceversa:

$$\begin{aligned}\overline{G \ominus H} &= \overline{G \oplus H} \\ \overline{G \oplus H} &= \overline{G \ominus H}\end{aligned}\quad (4.58)$$

Los fundamentos de las operaciones de Morfología matemática, incluyendo las demostraciones de todas las propiedades vistas, pueden ser encontradas en el libro de Serra [Serra82].

#### 4.2.4.1.2 Opening y closing

Usando los operadores elementales de erosión y dilatación, se pueden diseñar operaciones de realce de formas de objetos. La erosión suele utilizarse para eliminar pequeños objetos, práctica que será utilizada posteriormente en la fase de postprocesado. Sin embargo, tiene el inconveniente de disminuir el tamaño del resto de los objetos. Este efecto puede ser subsanado con una aplicación en cascada de erosión y dilatación con igual elemento estructurante. A esta operación se la llama *opening*.

$$G \circ H = (G \ominus H) \oplus H \quad (4.59)$$

El *opening* elimina todos los objetos que no están completamente contenidos en el elemento estructurante, pero además no disminuye el tamaño a los objetos que superen la erosión. Esta operación puede ser ideal para la eliminación de falsas alarmas. Nótese que las fronteras de los objetos también serán suavizadas.

Por el contrario, la dilatación opera agrandando los objetos, cerrando los agujeros y las grietas. El ensanchamiento de los objetos puede ser reducido mediante la aplicación seguida de una erosión. La operación combinada de dilatación y erosión es llamada *closing*:

$$G \bullet H = (G \oplus H) \ominus H \quad (4.60)$$

El cambio de áreas de los objetos puede ser resumido por las siguientes relaciones, considerando que H contenga el origen:

$$G \ominus H \subseteq G \circ H \subseteq G \subseteq G \bullet H \subseteq G \oplus H \quad (4.61)$$

*Opening* y *closing* son operaciones idempotentes

$$\begin{aligned} G \bullet H &= (G \bullet H) \bullet H \\ G \circ H &= (G \circ H) \circ H \end{aligned} \quad (4.62)$$

esto es, la aplicación de una segunda vez de un *closing* o un *opening* con igual elemento estructurante no muestra cambios de una a otra.

#### 4.2.4.1.3 Operadores *hit-miss*

La idea de estos operadores es si es posible detectar objetos de una forma determinada. La erosión sólo elimina aquellos objetos que no contengan al menos el elemento estructurante, por lo que la detección de una forma específica requiere una combinación de más operaciones morfológicas.

Por ejemplo, si se desea encontrar un objeto que tenga la forma

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

en la imagen G, al aplicar una erosión utilizando como elemento estructurante  $H_1$ , se eliminan todos los objetos que no contengan completamente la máscara, pero también pasarán objetos de mayor tamaño a  $H_1$ . Se hace necesario aplicar una nueva operación para eliminar aquellos objetos que han superado la erosión y son mayores a  $H_1$ . Analizando el fondo de la imagen binaria, se observa que si se hace una erosión con una máscara  $H_2$  de tamaño 3 x 5, justo la contraria de  $H_1$ , esto es:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

al erosionar el fondo con  $H_2$  aparecerán objetos del fondo con la forma de  $H_2$ , correspondiendo con formas de igual tamaño a  $H_1$  o menores. Luego, la intersección de la primera erosión con la segunda dará todos los píxeles de objetos constituido por una fila de tres píxeles consecutivos. En general, los operadores *hit-miss* se definen como:



$$G \otimes (H_1 H_2) = (G \ominus H_1) \cap (\overline{G \ominus H_2}) = (G \ominus H_1) \cap (\overline{G \oplus H_2}) \quad (4.65)$$

con la condición de  $H_1 \cap H_2 = 0$ , en caso contrario, el resultado de la operación podría dar el conjunto vacío.

Ésta es una herramienta muy potente tanto para la detección de formas, como para el borrado de objetos con formas determinadas. La versatilidad de éstas, pueden ser fácilmente mostradas utilizando una nueva máscara:

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1111111 \\ 1000001 \\ 1111111 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

La erosión del fondo con esta máscara,  $\overline{G} \ominus H_3$ , dará como resultado la detección de objetos que contengan horizontalmente de 1 a 5 píxeles consecutivos, en un fondo de  $3 \times 7$ . Al aplicar el operador *hit-miss* con  $H_1$  y  $H_3$ ,  $G \otimes (H_1 H_3)$ , se tendrá como resultado objetos de 3 a 5 píxeles consecutivos con una fila. Siendo las máscaras del *hit* y el *miss* disjuntas, se desprende que los '1' en el *hit*, combinados con los '0' del *miss*, darán los píxeles del resultado. Obsérvese que aparece un tercer tipo, a lo que se denomina 'x', los cuales permitirán un cierto grado de libertad en la forma que se busca. Por ejemplo, en la muestra utilizada la máscara *hit-miss* que localiza objetos que contengan de 3 a 5 píxeles consecutivos en fila será del estilo

$$H = \begin{bmatrix} 0000000 \\ 0x111x0 \\ 0000000 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Si una máscara *hit-miss* carece de píxeles de tipo 'x', extraerá las formas de la máscara. Para el caso de que existan 'x', los '1' de la máscara darán la forma más pequeña, y los '1' con 'x' entregarán las formas más grandes.

Otros ejemplos pueden ser máscaras como  $H_A$  que encuentran píxeles aislados, o un detector de borde de esquina inferior derecha como  $H_B$

$$H_A = \begin{bmatrix} 000 \\ 010 \\ 000 \end{bmatrix} \quad H_B = \begin{bmatrix} x10 \\ 110 \\ 000 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$



**Figura 4.8 a)Imagen sintética en la que se pretende realzar figuras de tres, cuatro o cinco píxeles consecutivos horizontales b)erosión con H1, c)erosión con la imagen negada y H2 d) Resultado de 3 píxeles e) Resultado de 3 a 5 píxeles**

#### 4.2.4.2 Tratamiento con imágenes multinivel

En esta sección se van a extender las operaciones básicas de dilatación, erosión, *opening* y *closing* a imágenes con niveles de grises. Como se hizo para imágenes binarias, el objetivo es hacer uso de la morfología en niveles de grises para el realce de una forma, en este caso de defectos locales dentro de una superficie homogénea. Esta técnica se presenta, en el contexto de esta tesis, para el procesado de la imagen antes de la segmentación, a diferencia de las prácticas binivel utilizadas en fase de postprocesado.

Los operadores morfológicos actúan ahora sobre una imagen digital, esto es, cada pixel de la imagen posee un valor discreto, cuyo rango se encuentra entre 0 y Q-1, siendo G la matriz de estos valores y H el elemento estructurante, el cual es una función subimagen.

A diferencia del caso binario ya estudiado, cada punto no representa la pertenencia o no a un determinado objeto. Los puntos que se suelen agrupar como objetos diferenciados, pueden presentar valores no homogéneos en las características diferenciadoras.

##### 4.2.4.2.1 Erosión y dilatación en niveles de grises

Puesto que la erosión y dilatación satisfacen ciertos números de identidades algebraicas, existe un número equivalente de formas de definirlos. La erosión en escala de gris se puede definir como:

$$g'_{m,n} = \min \{ g_{m+m',n+n'} - h_{m',n'} \mid (m+m',n+n') \in D_G; (m',n') \in D_H \} \quad (4.69)$$

donde  $D_G$  y  $D_H$  son los dominios de G y H respectivamente. Geométricamente, para encontrar la erosión de una señal por un elemento estructurante en un punto  $g_{m,n}$ , se desliza el elemento estructurante espacialmente, de forma que el origen se encuentre en el punto  $g_{m,n}$ , y entonces se encuentra la mínima cantidad que se puede obtener. Cuando el origen se encuentra dentro de la máscara, la señal erosionada se encuentra por debajo de la señal inicial.

La expresión ( 4.69 ) indica que la erosión se basa en la elección del valor mínimo de  $g_{m+m',n+n'} - h_{m',n'}$ , en el entorno de vecindad definido por el elemento estructurante. Las prestaciones de una erosión en niveles de grises son dos: si todos los elementos de la máscara son positivos, la imagen resultante tiende a ser más oscura que la imagen de entrada, y segundo, los detalles brillantes en la imagen de entrada que sean más pequeños que el elemento estructurante serán eliminados.

Como en el caso binario, la dilatación se define de forma dual a la erosión. Así se puede definir como:

$$g'_{m,n} = \max\{g_{m+m',n+n'} + h_{m',n'} \mid (m+m',n+n') \in D_G; (m',n') \in D_H\} \quad (4.70)$$

Puesto que la dilatación se basa en elegir el valor máximo de  $g_{m+m',n+n'} + h_{m',n'}$ , en el entorno de vecindad definido por la forma del elemento estructurante, el efecto general de realizar la dilatación sobre una imagen en escala de grises es doble. Si todos los valores del elemento estructurante son positivos, la imagen de salida tiende a ser más brillante que la imagen de entrada, y dos, los detalles oscuros quedan reducidos o incluso eliminados.

#### 4.2.4.2.2 Maximizados y minimizados espaciales

Por elemento estructurante plano se entiende aquel que es constante en todo su dominio de definición. Los elementos estructurantes planos han jugado un importante papel en la morfología multinivel. La clase de elementos estructurantes planos puede verse como aquella definida únicamente por sus dominios y además de valor nulo en los puntos en los que se encuentra definida, es decir:

$$h_{m,n} = 0 \quad (m,n) \in D_H \quad (4.71)$$

De esta forma cuando se aplica la erosión a una imagen G por la máscara H, se tiene:

$$g'_{m,n} = \min\{g_{m+m',n+n'} \mid (m+m',n+n') \in D_G; (m',n') \in D_H\} \quad (4.72)$$

representando un minimizado espacial de la imagen G sobre la ventana definida por  $D_H$ . Por igual razonamiento, la dilatación se convierte en:

$$g'_{m,n} = \max\{g_{m+m',n+n'} \mid (m+m',n+n') \in D_G; (m',n') \in D_H\} \quad (4.73)$$

obteniendo un maximizado espacial de la imagen G, según la forma y dimensión del elemento estructurante.

#### 4.2.4.2.3 Opening y closing en escala de grises

Como en el caso binario, ambas operaciones son duales. Análogamente al mismo, el *opening* puede definirse como una erosión seguida por una dilatación:

$$G \circ H = (G \ominus H) \oplus H \quad (4.74)$$

El *closing* en escala de grises se puede definir como una dilatación seguida de un proceso de erosión:

$$G \bullet H = (G \oplus H) \ominus H \quad (4.75)$$

El *opening* y *closing* cumplen las propiedades propias de los filtros morfológicos, es decir, presentan traslaciones invariantes. De igual forma, como todo filtro morfológico es creciente e idempotente:

$$G' \subseteq G \quad G' H \subseteq GH \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} G \bullet H &= (G \bullet H) \bullet H \\ G \circ H &= (G \circ H) \circ H \end{aligned} \quad (4.77)$$

Además, aparte de las propiedades lógicas como filtro, el *opening* es un filtro anixtensivo y el *closing* resulta ser un filtro extensivo

$$G \ominus H \subseteq G \circ H \subseteq G \subseteq G \bullet H \subseteq G \oplus H \quad (4.78)$$

#### 4.2.4.2.4 Transformaciones *Top-Hat*

Como ya se vio en 4.2.4.1.3, la intersección de dos imágenes binarias con máscaras *hit-miss* producían la búsqueda de formas determinadas. En escala de grises, este actuar puede ser utilizado para el realce de grupos de píxeles homogéneos y contiguos. Obviamente, la intersección no es posible entre imágenes multinivel, por lo que la técnica de procesamiento morfológico varía, pasando de la intersección a la substracción. Aparece un nuevo operador llamado *top-hat* y definido como:

$$HAT(GH) = G - (G \circ H) \quad (4.79)$$

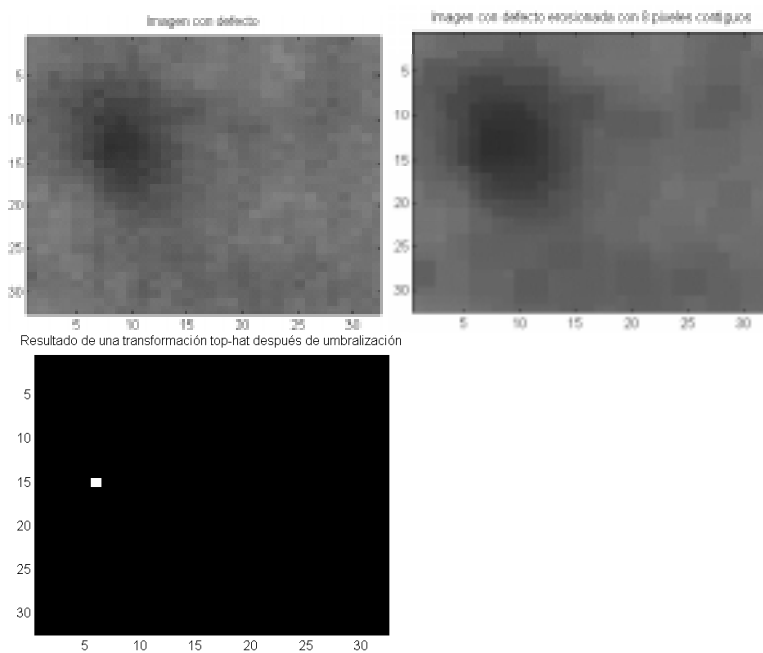
Al ser el *opening* un operador antiextensivo, el resultado de esta operación estará por debajo de la imagen original, así que la transformación *top-hat* dará siempre valores mayores o iguales a cero.

Para el realce de valles se usará un operador dual al definido en (4.79):

$$-HAT(GH) = (G \bullet H) - G \quad (4.80)$$

Consecuentemente, si se elige una máscara mayor que los valles, éstos serán eliminados en *closing* y realzados en la sustracción. Para detectar conjuntamente picos y valles, se puede en primer lugar realizar transformación *top-hat* y localizar el umbral para los puntos brillantes. Y en segundo lugar, lo mismo pero esta vez aplicando el operador dual *top-hat*. Otro proceder, es aplicar en paralelo un *opening* y un *closing*, para seguir con una sustracción de lo obtenido,  $(G \bullet H) - (G \circ H)$ .

El operador HAT es ilustrado en la figura 4.9, en la que se aplica una máscara H mayor que el valle del defecto. Obsérvese como éstos son eliminados y al sustraerse aparecen realzados.



**Figura 4.9 a)Imagen con defecto local de tipo 'pitch' b)Erosión de la imagen c)-HAT umbralizado**

### 4.3 Etapa de decisión: segmentación

---

La decisión es la etapa segunda del modelo de detección, presentado anteriormente en la introducción y reflejado en la figura 4.4. Su objetivo es clasificar los píxeles de las imágenes capturadas en defectuosos o no. Es una transformación no lineal e irreversible, eliminando la mayoría de la información adquirida. Esta etapa es crucial dentro del sistema de inspección, al implicar la selección de información que será procesada en etapas posteriores.

En el diseño de la etapa de decisión pueden considerarse dos fases, la selección de la estrategia de decisión y la selección del modo de implementación. La primera tiene como objeto la determinación de los parámetros a utilizar, mientras la segunda fase trata de poner en práctica la estrategia de decisión en niveles de grises del umbral.

Por tanto, el proceso de análisis que se plantea a continuación, trata de establecer la estrategia de decisión para pasar a continuación a su implementación. Pero para poder entrar en tal planteamiento, se hace necesario presentar la modelización del problema, a partir de las funciones de densidad de las imágenes de escenarios SIVA.

#### 4.3.1 Modelización del problema mediante las funciones de densidad

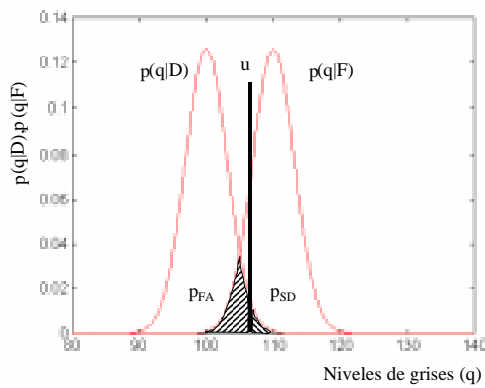
Tal como se ha comentado, la decisión es la etapa en que se separa la información útil de la inútil, es decir, distingue entre lo llamado mensaje, señal o defecto (correspondiente a los datos que representan virtualmente al material defectuoso), y lo que se denomina ruido o fondo (representante de material no defectuoso). Puede haber diferentes niveles de decisión, y cada nivel tendrá como objeto incrementar la relación señal - ruido, rechazando una porción de la componente ruidosa, además de mantener, en todo lo que se pueda, la componente de mensaje. El rechazo de ruido implica la pérdida de información, pero ésta también puede llevar consigo la eliminación de componente mensaje. Este modo de operar produce dos tipos de errores: el primero es eliminar datos que perteneciendo a la señal defectuosa han sido cancelados, por lo que en fases posteriores de análisis de la señal no serán considerados. Éste es el tipo de error más grave. El segundo es considerar parte de la información del fondo como parte constitutiva del mensaje de defectos. No obstante, éste puede ser subsanado mediante etapas de post – procesado, que serán analizadas en el siguiente apartado.

El estudio sobre la problemática de la decisión, se aborda pues desde la modelización de la señal adquirida a través de sus funciones de densidad. Sea una imagen  $G$  procesada para el realce de los defectos con  $Q$  niveles de grises, de 0 a  $Q-1$  niveles, se definirá  $p(q)$  como la probabilidad de que un pixel cualquiera tenga el nivel  $q$  de gris,  $g_{m,n}=q$ . Por tanto esta función de densidad discreta cumplirá con los requisitos de:

$$\sum_{q=0}^{Q-1} p(q) = 1$$

$$p(q) \geq 0 \quad (4.81)$$

Atendiendo a las definiciones dadas, es posible calcular las funciones de densidad en niveles de grises del fondo y del defecto, al que se llamarán respectivamente  $p(q|F)$  y  $p(q|D)$ . Éstas expresarán las probabilidades de que un pixel del fondo o del defecto tenga el nivel gris  $q$ . Los histogramas de las respectivas señales corresponderán con las funciones de densidad muestrales, exceptuando el nivel de escala.



**Figura 4.10 Funciones de densidad de fondo y defecto**

Cuando la decisión es tomada por la elección de un umbral,  $u$ , tal que si el nivel de gris del pixel es menor o igual a  $u$ , éste será etiquetado como defectuoso, en caso contrario se considerará como pixel del fondo. Este método determinará defectos que tengan tonalidad más oscura que el fondo. De igual forma, se podría definir un umbral  $u'$  para separar píxeles del fondo de defectos de apariencia más clara. En este caso, aquellos píxeles cuyos niveles de grises superan a  $u'$  serán clasificados como defectuosos, el resto corresponderán al fondo. Pero en lo que sigue y sin pérdida de generalidad, se va a estudiar los efectos de aplicar un

único umbral, por ejemplo  $u$ . Las conclusiones que se saquen seguirán siendo válidas en la aplicación de  $u'$ , sólo habrá de considerar que en este caso la función de densidad de defecto se encuentra situada a la derecha respecto a la del fondo.

Al utilizar un umbral  $u$  sobre una imagen muestreada, la etapa de decisión clasificará los píxeles en defectuosos o no. Para poder modelizar la respuesta de esta etapa habrá que utilizar las funciones de densidad tanto del fondo como del defecto,  $p(q|F)$  y  $p(q|D)$ . Por tanto, los resultados de la etapa de decisión en términos probabilísticos serán:

$$p_{DD} = \sum_{q=0}^u p(q|D), \quad p_{SD} = \sum_{q=u+1}^{Q-1} p(q|D)$$

$$p_{FD} = \sum_{q=u+1}^{Q-1} p(q|F), \quad p_{FA} = \sum_{q=0}^u p(q|F) \quad (4.82)$$



$p_{DD}$  y  $p_{FD}$  indicarán las probabilidades de píxeles clasificados correctamente, mientras  $p_{SD}$  y  $p_{FA}$  muestran las probabilidades de píxeles de defectos no detectados y de falsas alarmas. Obsérvese que éstas son probabilidades acumulativas, coincidiendo con el concepto de función de distribución. La tabla 4.1 muestra un resumen de lo expuesto:

**Tabla 4.1 Resultados de la etapa de decisión**

Muestra	Decisión	Probabilidad
Defecto	Defecto	Defecto detectado, $p_{DD}$
Defecto	Fondo	Sin detectar, $p_{SD}$
Fondo	Fondo	Fondo detectado, $p_{FD}$
Fondo	Defecto	Falsas alarmas, $p_{FA}$

El umbral  $u$  se posicionará tal que separe la componente del fondo respecto del defecto. Idealmente, las componentes de ruido y señal deberían estar lo suficientemente alejadas, como para que tanto las probabilidades de las falsas alarmas como de defectos sin detectar sean cero, pero esto no suele suceder. Lo más común, es que ambas componentes se solapen, tal como mostraba la figura 4.10, provocando que la colocación de  $u$  sea un compromiso entre  $p_{FA}$  y  $p_{SD}$ . La selección más apropiada del umbral  $u$  es lo que se llama la estrategia de decisión.

### 4.3.2 Estrategias de decisión

El objetivo último de la etapa de decisión consiste en maximizar la probabilidad de detección,  $p_{DD}$ , minimizando la probabilidad de falsas alarmas,  $p_{FA}$ . Obsérvese que representan objetivos contrapuestos, así un aumento de  $p_{DD}$  puede originar un incremento fuerte de falsas alarmas, o una disminución de falsas alarmas puede llevar a una mala detección de defectos. Obviamente el grado de compromiso dependerá del lugar que ocupe el umbral. En el caso de conocer el coste de falsas alarmas,  $c_{FA}$ , y el de defecto sin detectar,  $c_{SD}$ , es posible establecer una función de coste del tipo:

$$l(u) = c_{FA}(u)p_{FA}(u)p(F) + c_{SD}(u)p_{SD}(u)p(D) \quad (4.83)$$

donde el mínimo de  $l(u)$ , dará el valor de  $u$  óptimo. Pero este planteamiento parte de que se conoce tanto las funciones de densidad, como las de coste. Cuando esta información no está disponible, hay varias alternativas, de las que algunas son descritas en [Norton82][Brads94]. Éstas, en general, se basan en el conocimiento de al menos la función de densidad de fondo, siendo las más comunes el observador de Neyman – Pearson, o el observador inverso de Neyman – Pearson.

#### 4.3.2.1 Las estrategias de Neyman-Pearson

Este método plantea la posición del umbral  $u$  a partir de mantener un nivel aceptable de falsas alarmas. Es el más simple de implementar y no requiere conocimientos de las características de mensaje. El nombre se deriva del test de Neyman - Pearson, utilizado para la determinación de validez de una hipótesis estadística.

La elección del umbral  $u$  vendrá dado por el índice de falsas alarmas que deberá estar por debajo de un cierto nivel  $k$

$$p_{FA}(u) < k \quad (4.84)$$

La principal ventaja de esta estrategia es la poca información a priori que debe ser requerida. No se precisa de la función de densidad del defecto y opcionalmente la del fondo. En general, resulta difícil obtener en línea las características de los datos de partes defectuosas, mientras resulta relativamente fácil obtener información del fondo. Si la función de densidad del fondo es conocida, el umbral puede ser calculado para un valor dado de  $p_{FA}$ . Incluso si no es conocida  $p(q|F)$ , es posible determinar 'u' ajustando manualmente hasta alcanzar un nivel aceptable de falsas alarmas.

Pero este proceder tiene dos grandes inconvenientes, el primero que no se conoce el nivel de acierto de los defectos y, segundo, una variación sobre el umbral no predice el mejoramiento o empeoramiento de la detección. Por ejemplo, podría suceder que al mover el umbral  $u$ , en el sentido de aumentar el nivel de falsas alarmas, se produjese un incremento espectacular de detección del defecto, mientras el valor de  $p_{FA}$  se ha aumentado levemente. Por lo que no es posible establecer un nivel óptimo de umbral.

La estrategia inversa de Neyman-Pearson, consiste en ajustar el umbral mediante la imposición de un nivel de probabilidad de detección de defectos superior a un cierto valor de  $k$ , esto es:

$$p_{DD}(u) > k \quad (4.85)$$

Esta estrategia es especialmente apta para aquellas aplicaciones donde todos los mensajes deben ser detectados. Las consecuencias pueden ser que los niveles de falsas alarmas sean inaceptables. Pero como ya se dijo tanto en la introducción del capítulo como al inicio de este apartado, es posible aplicar una tercera etapa de post – procesado, reduciendo el nivel de falsas alarmas. Para los propósitos de detección, esta estrategia es superior a la anterior y por doble motivo. Es posible determinar teóricamente los niveles de  $p_{DD}$ ,  $p_{SD}$ ,  $p_{FD}$  y  $p_{FA}$ , y además es posible poder evaluar los efectos de la modificación de  $u$ . El principal inconveniente está en que se necesita el conocimiento a priori de las señales de los defectos.

### 4.3.2.2 Funciones de densidad del fondo y de los defectos

El anterior apartado ha mostrado cómo la elección óptima del umbral depende del conocimiento de las funciones de densidad del fondo y del defecto, por lo que se plantea a continuación un estudio de las características de estas señales. Primero se expone las propiedades de las señales del fondo y luego las derivadas de la forma de los defectos.

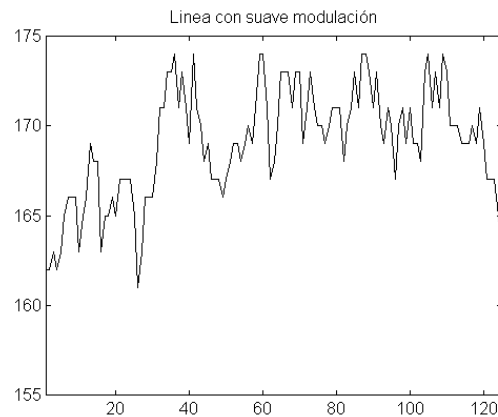
#### 4.3.2.2.1 Características de la señal de fondo

Al captar una imagen sin defecto del escenario SIVA, muestra un conjunto de propiedades que van a ser estudiadas. Antes de entrar en el análisis, se parte de tres supuestos matemáticos referidos al modelo espacio-temporal de la distribución de la intensidad lumínica:

1. La señal es estacionaria, esto es, el valor medio de la señal se mantiene constante en el tiempo. Implica que la iluminación y los sensores de captación mantienen sus características a lo largo del tiempo, si bien en la práctica no es del todo cierto (véase el estudio sobre formación de imágenes en SIVA)
2. La señal sigue un modelo probabilístico, como consecuencia del proceso de obtención del material a inspeccionar. Ésta seguirá una determinada ley al ser un proceso estocástico.
3. La señal muestra una textura repetitiva, es decir, un patrón espacial que se repite, habiendo correlación espacial entre las líneas adquiridas.

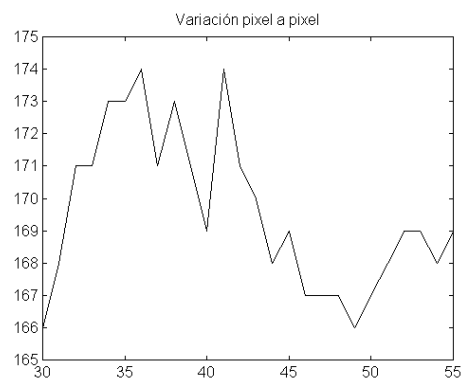
A partir de estas suposiciones, la señal del fondo tiene tres elementos distinguibles:

1. Una lenta modulación. Su origen viene dada tanto por los efectos de la iluminación como por las lentes. Recuérdese que la intensidad luminosa disminuye de forma cuadrática entre la superficie y el foco. Los valores medios de los píxeles en el centro serán mayores que en los bordes. De la misma manera, la transmitancia en el corazón de la lente es distinta que en las partes periféricas. Estos efectos son estacionarios y probabilísticos, pudiendo ser modelizados según se vio en el capítulo 3 de formación de imágenes.



**Figura 4.11 Suave modulación**

2. Las variaciones entre líneas pares e impares generadas por las propias cámaras entrelazadas, o la discontinuidad entre píxeles adyacentes provocadas por zonas no sensibles, provoca una señal discontinua.



**Figura 4.12 Variación pixel a pixel**

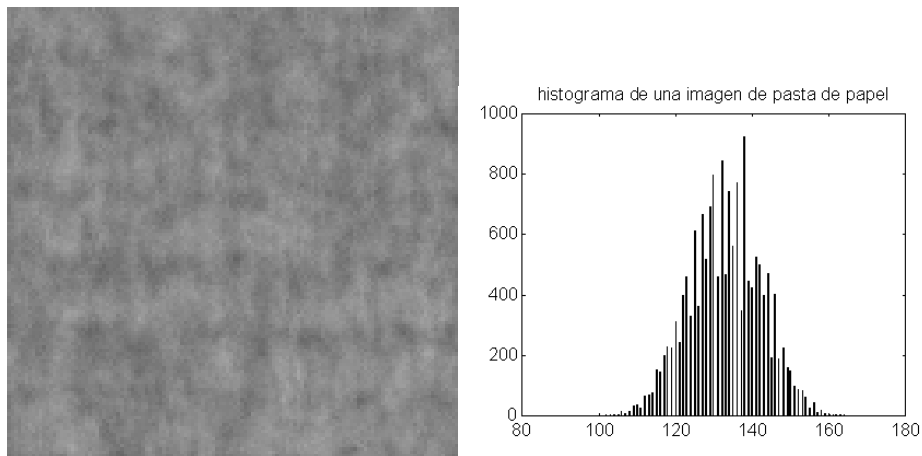
3. Existe variación aleatoria de la señal debida a la rugosidad de la superficie a inspeccionar. Según se vio en la formación de imágenes, los modelos de superficies homogéneas empleadas utilizaban funciones probabilísticas.

Un análisis del histograma de niveles de grises de imágenes que cumplan con estos requisitos, desprenderá que su función de densidad sigue una distribución normal. La

consecuencia era de esperar, al aplicar el teorema central del límite, que dice lo siguiente: “una variable aleatoria sigue una distribución gaussiana, cuando ésta viene originada por la suma de un número creciente de variables aleatorias independientes, que actúan conjuntamente formando la señal de medida”. Este efecto suele ser común cuando se efectúan medidas, en las que intervienen diversos factores en su obtención. También indica esta conclusión que la información adquirida emana de tres fuentes.

1. El proceso de fabricación del material. Aunque éste es de carácter estocástico, no implica una respuesta preestablecida sino que introduce desviaciones aleatorias dentro de la señal.
2. Causas aleatorias como consecuencia de la reflexión de la luz en la textura del material.
3. Las características del sensor y de la electrónica asociada.

Los efectos combinados de estas tres fuentes generan que los histogramas de las imágenes adquiridas sigan una distribución normal. La figura 4.13 muestra una imagen correspondiente a la adquisición de pasta de papel, donde también se presenta el histograma de la imagen, observando que sigue una distribución normal.



**Figura 4.13 Imagen de pasta de papel sin procesar e histograma**

La modelización de la señal carente de defecto mediante una distribución normal, implica el exacto conocimiento de ésta desde el punto de vista de la distribución de niveles de grises en las imágenes adquiridas.

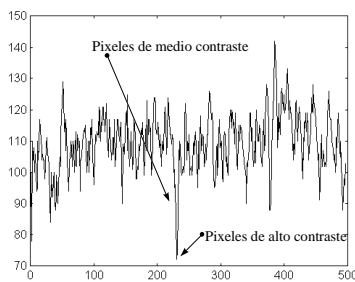
#### 4.3.2.2.2 Características de la señal de los defectos

Las diferentes formas de defectos generarán un catálogo de funciones de densidad, por lo que no parece que pueda expresarse en términos generales. Por ejemplo, puede

haber faltas que contengan píxeles de tonalidad oscura y otros de tonalidad clara. Las peculiaridades de cada defecto marcarán distintas funciones de densidad.

No obstante en algunas aplicaciones, los defectos locales se caracterizan por puntos de medio y alto contraste respecto a la textura de la materia, entre el 20% al 60% de nivel de contraste [Feng93]. En general sus apariencias, tienden a aproximarse a elipses o a manchas oscuras y menos frecuente es la aparición de burbujas brillantes. En la experiencia obtenida en el desarrollo de esta tesis coincide con la afirmación de Feng. Así en el caso de fallos en la pasta de papel, en el 96% de los defectos sus apariencias son de puntos oscuros próximos a forma circular. Y en el aluminio colado, las inclusiones de gas originan puntos brillantes mientras el grafito provoca faltas en forma de motas y manchas de tonalidad oscura.

Si se considera que para la detección de un defecto local es necesario que exista al menos un pixel de alto contraste (*full contrast*), se está definiendo una nueva estrategia de decisión. La idea de Feng es que la detección de los defectos, es un problema de encontrar donde están los píxeles de alto contraste.



En la figura 4.14 se aprecia como el defecto está constituido por píxeles de alto y medio contraste. Luego, si se detecta los píxeles de alto contraste y posteriormente se aplica operaciones morfológicas y de vecindad (ver párrafos 4.4.2), es posible reconstruir el defecto total o parcialmente.

**Figura 4.14** Píxeles de alto y medio contraste

### 4.3.3 Implementación de la decisión: Segmentación de imágenes

La segmentación representa la manera de implementación de la estrategia de decisión. Segmentar una imagen digital, significa dividirla en zonas disjuntas e individualizadas. En cierta manera, equivale a su reconocimiento, pues como consecuencia de la segmentación, los diferentes objetos que se encuentran perfectamente ubicados dentro de la imagen son detectados. Asociado a la idea de segmentación está el concepto de umbral, que queda definido de la forma:

$$u = u(m, n, g_{m,n}, p_{m,n}) \quad (4.86)$$

donde  $g_{m,n}$  es la intensidad del punto situado en las coordenadas  $m,n$ , y  $p_{m,n}$  representa alguna propiedad local mediada en un entorno de vecindad de este punto. La imagen que se obtiene al llevar a cabo un procesamiento de umbral se define como:

$$g'_{m,n} = \begin{cases} 1 & g_{m,n} \leq u \\ 0 & g_{m,n} > u \end{cases} \quad (4.87)$$

de forma que los píxeles etiquetados con '0' se corresponde con el fondo, mientras que los '1' se corresponden con los defectos. En la ecuación (4.87) se supone que la intensidad del defecto es menor que la intensidad del fondo. Cuando en (4.86),  $u$  depende sólo de  $g_{m,n}$ , el umbral se llama global. Pero si  $u$  depende tanto de  $g_{m,n}$  como de  $p_{m,n}$ , el umbral se denomina local, y cuando además depende de las coordenadas espaciales,  $x$  e  $y$ , se llama umbral dinámico.

Los umbrales globales tienen aplicación en situaciones donde existe una clara definición entre los objetos y el entorno, y cuando la iluminación es relativamente uniforme. Los sistemas de iluminación de luz posterior y las técnicas de iluminación por franjas pueden dar como resultados imágenes que pueden ser segmentadas mediante el uso de umbrales globales. A menudo, una iluminación arbitraria del espacio da lugar a imágenes que, si se trabaja con umbrales, requieren de algún tipo de análisis local para compensar efectos, como las no uniformidades de iluminación, sombras y reflejos[Marav93]. Por eso, se ha puesto tanto énfasis en el diseño de los sistemas de iluminación, ya que un buen diseño en esta etapa ahorrará mucho esfuerzo computacional.

Ha habido un gran esfuerzo por parte de la comunidad científica, en cómo segmentar imágenes mediante umbrales en niveles de grises. El resultado es una gran variedad de algoritmos, un resumen de éstos se puede encontrar en [Sahoo88][Glasb93]. Sin embargo, muchas de las técnicas presentadas, parten de la suposición de que al menos hay un objeto de interés. Esta hipótesis de trabajo no es admisible para la detección de defectos, pues en una imagen capturado puede no haber defectos. El planteamiento de técnicas de umbral para la detección de defectos se esboza a continuación.

#### 4.3.4 Umbralización para la detección de defectos

La umbralización para la detección de los defectos no puede asumir la existencia de al menos un defecto en la imagen adquirida. Esta hipótesis de trabajo es, sin embargo, una gran diferencia con los puntos de partida de muchos algoritmos de segmentación. En general, se suele asumir lo contrario, esto es, que la mayoría de las imágenes inspeccionadas carecen de defectos y el umbral es esencialmente utilizado para eliminar la información redundante del fondo.

Para abordar el diseño del umbral óptimo se recurre a las propiedades de las señales del fondo y de mensaje. De un lado se está suponiendo que al llegar a esta etapa, la función de densidad de la señal ruidosa tiene una tendencia a seguir una distribución gaussiana. Por lo tanto, los parámetros de estas funciones vienen determinadas por sus medias y

varianzas,  $\mu$  y  $\sigma$ . El nivel de falsas alarmas puede ser determinado desde el punto de vista teórico, y como es conocido, la  $p_{FA}$  dependerá de la distancia del umbral,  $u$ , respecto a la intensidad media de la imagen, pudiéndose medir mediante  $k$  veces la varianza. Así, un umbral separado tres veces la varianza respecto a la media,  $\mu \pm 3\sigma$ , dará una probabilidad de falsas alarmas de menos de un 1%. Este conocimiento a priori puede ser empleado en la construcción de la etapa de segmentación.

Otra fuente a utilizar viene de la búsqueda de píxeles de alto contraste, el umbral será determinado tal que sólo detecte los píxeles de mayor contraste. Esta premisa permitirá disminuir la  $p_{FA}$  al poder desplazar 'u' a posiciones más alejadas respecto a la media. Pero esta actuación, requerirá de una nueva etapa que tenga como objetivo la reconstrucción del defecto a partir de las píxeles de alto contraste.

Llegado a este punto, la localización del umbral pasa por un lado por la validez de las suposiciones hechas, y en el caso de cumplir se pueden presentar dos tipos de umbral, que atendiendo a la clasificación anteriormente dada, puede ser de tipo global o de tipo local. Si no cumple las hipótesis iniciales de trabajo habrá de recurrir a otras técnicas que deberán ser exploradas. Por tanto, el método tratará en primer lugar de validar las hipótesis de trabajo, en el caso de cumplir se presentan dos tipos de algoritmos de umbralización. Mientras habrá de recurrir al estado de la técnica para tratar otros métodos, por ejemplo el presentado por Macaire [Macai93].

#### 4.3.4.1 Validez de las conjeturas de normalidad en la señal del fondo

Si bien la tendencia, según se ha visto, es tener imágenes adquiridas en escenas SIVA caracterizadas por distribuirse la intensidad del pixel de forma normal, también hay que incidir sobre la posibilidad de haberlas tratada anteriormente en la etapa de realce. Para una transformación de tipo lineal, la nueva función de densidad también será normal, eso sí, se habrán modificado los parámetros de la normalidad según el tipo de máscara utilizada. Obviamente, esta afirmación no es válida si el realce no se basa en filtros lineales. Aun en el caso de realces basados en transformaciones lineales, no hay que olvidar que la variable de intensidad es discreta y por tanto finita, pudiendo provocar efectos de saturación tanto porque de resultados de la convolución sean menores que cero o superiores al mayor valor de discretización.

La validez de la conjetura de normalidad en la distribución de la señal del fondo, puede refrendarse de dos formas: una mediante algún test de normalidad y otra a través de las propiedades que se derivan de una distribución normal.

Para la primera y aunque existen diferentes posibilidades de abordar este estudio, no todos los contrastes de normalidad se pueden aplicar a este caso en concreto. El método de Shapiro y Wilks no se puede utilizar dado que tan sólo se puede aplicar a muestras de pocos datos, tampoco es aplicable el criterio de Kolgomorov-Smirnov dado que su uso está restringido a funciones continuas.



El contraste elegido, dada su sencillez y fácil aplicación, es el de Jarque y Vera[Gallar97]. Este método basa todo su desarrollo en el hecho de que toda distribución normal es simétrica y su coeficiente de apuntamiento vale tres. Lo primero es medir la simetría con el coeficiente de asimetría, el cual proviene de dividir el momento de orden tres respecto a la media entre la desviación típica al cubo:

$$CA = \frac{m^3}{\sigma^3} = \frac{\sum_{q=0}^{Q-1} (\hat{p}(q)(q - \hat{\mu}))^3}{\hat{\sigma}^3} \quad (4.88)$$

donde  $p(q)$  corresponde con la función de densidad de niveles de grises. En cuanto al coeficiente de apuntamiento o curtosis, se calcula su valor con el momento de orden cuatro respecto a la media dividido entre la desviación típica a la cuarta:

$$CA_p = \frac{m^4}{\sigma^4} = \frac{\sum_{q=0}^{Q-1} (\hat{p}(q)(q - \hat{\mu}))^4}{\hat{\sigma}^4} \quad (4.89)$$

Jarque y Vera demuestran que bajo condiciones de normalidad, la expresión:

$$J = \frac{CA^2}{6} + \frac{CA_p^2}{24} \quad (4.90)$$

sigue una distribución  $\chi^2$  con dos grados de libertad. Por lo tanto, se puede calcular el índice de confianza de la hipótesis de normalidad.

La segunda forma es a través de sus propiedades. Si la distribución es normal deberá cumplir con los siguientes requisitos:

1. El nivel de falsas alarmas puede ser determinado a través de la media y la varianza del histograma de la imagen:

$$p_{FA}(u) = \sum_{q=0}^u p(q | F) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{-u} e^{-\frac{(q-\mu)^2}{2\sigma^2}} dq \quad (4.91)$$

La aproximación se hace al convertir a  $q$  de discreta a continua. Por tanto deberá coincidir el valor teórico dado por ( 4.91 ) y el obtenido al aplicar un umbral  $u$  sobre las imágenes capturadas.

2. El nivel de falsas alarmas debe ser igual para  $u$  y  $u'$ , si se hace una umbralización del tipo:  $\mu \pm k\sigma$ . En otras palabras, la distribución al ser simétrica, las probabilidades de falsas alarmas de tonalidad oscura y clara deben ser iguales. Este efecto puede ser estudiado mediante una doble umbralización  $u$ , y  $u'$ , observándose que las apariciones son del mismo orden de magnitud, para un valor de  $k$  determinado.
3. Las falsas alarmas deberán repartirse uniformemente por toda la imagen. En caso contrario significaría una pérdida de uniformidad de iluminación en la escena. Para su verificación se emplean los conceptos de centros de gravedad de la imagen binarizada.

#### 4.3.4.2 Umbrales para fondos con distribución normal

En el caso de superar el contraste de hipótesis, se podría pensar en dos tipos de algoritmos de umbralización. Uno de carácter global, válido cuando se tenga un sistema de formación de imágenes uniforme, y otro de corte local, utilizado en escenas con sub-regiones uniformes y que éstas cumplan con una distribución en niveles de grises gaussiana.

##### 4.3.4.2.1 Umbral global

El umbral global es aplicado sobre toda la imagen, y sus parámetros serán la media y la varianza muestral de la imagen, junto a una constante  $k$ , que determine la separación del umbral respecto a tantas veces de la varianza, quedando expresado como:

$$u = \mu \pm k\sigma \quad ( 4.92 )$$

Este método es muy sencillo de implementar y de bajo costo computacional. Sin embargo, la presencia de una falta de iluminación uniforme afectará negativamente a este tipo de umbral. Suele ser corriente, por el tipo de iluminación, mantener una luminosidad uniforme en un conjunto de líneas contiguas. Luego, se puede sugerir utilizar una división de la imagen en regiones disjuntas, que en su totalidad dan la imagen original, con la ventaja de haber formado subimágenes que cumplan las características de normalidad. Esto conllevará la necesidad de utilizar un umbral local.

##### 4.3.4.2.2 Umbral local

El problema anteriormente mencionado puede ser resuelto mediante un umbral local. Si en la imagen puede observarse una respuesta uniforme en regiones de ésta, se podría aplicar para cada una de las regiones un umbral distinto, del tipo:

$$u_i = \mu_i \pm k_i \sigma_i \quad (4.93)$$

donde el índice  $i$  denota la  $i$  región de la imagen. Este modo de actuar eliminará el efecto de lenta modulación que caracteriza ciertos escenarios SIVA. Ahora el umbral ya no es un escalar, sino un vector.

#### 4.3.4.2.3 El valor de $k$

Tanto en el umbral global como local necesitan conocer, a parte de la media y varianza, el valor de  $k$ . La validación de contraste de normalidad más la técnica de umbralización, permitirá utilizar una estrategia de observador de Neyman-Pearson. El valor de  $k$  vendrá dado por el nivel de falsas alarmas máximo permitido (ver 4.3.2.1). No obstante, como ya fue comentado, este planteamiento tiene inconvenientes, como no saber cuál es el nivel de acierto en la detección. La alternativa pasa por tener más conocimiento, en este caso hay que explotar las características sobre la señal de mensaje.

Al utilizar el concepto de detección de píxeles de alto contraste, es posible definir cuál es la función de distribución, no del defecto sino de los píxeles de altos contrastes. Al basar la detección en la localización de éstos, no se plantea una función de coste respecto a la función de densidad del defecto, sino a como se distribuyen los niveles de grises de estas semillas. El planteamiento pasará a ser similar a lo expuesto en (4.83). Pero ahora se utilizará la probabilidad de detección de píxeles de alto contraste, definida como:

$$p_{AC}(u) = \sum_{q=0}^u p(q | AC) \quad (4.94)$$

siendo  $p(q|AC)$  la función de densidad de los píxeles de alto contraste. El valor óptimo de umbral va a depender del coste de falsas alarmas,  $c_{FA}$ , y el de no detectar los píxeles de alto contraste,  $c_{AC}$ , pudiendo establecer una función de coste del tipo:

$$l(u) = c_{FA}(u)p_{FA}(u)p(F) + c_{AC}(u)(1 - p_{AC}(u))p(D) \quad (4.95)$$

Los valores de  $c_{FA}$  y de  $c_{AC}$  dependen de la aplicación en particular y de los criterios de calibración del sistema global.

Recuérdese que sólo hasta ahora se han detectado las semillas de los defectos, pero faltará una nueva etapa que sirva tanto para la reconstrucción definitiva o parcial del defecto y la eliminación de las falsas alarmas.

## 4.4 Agrupación de píxeles binarizados

---

Las prestaciones del sistema de detección pueden ser mejoradas mediante la adición de una tercera etapa, llamada agrupación de píxeles defectuosos. Ésta fue referenciada como el tercer bloque del modelo de detección, a la que también se la suele llamar etapa de post-procesado. El objetivo de esta nueva fase es doble, de un lado eliminar falsas alarmas, evitando cancelar la señal de mensaje y de otro, reconstruir el defecto a partir de los píxeles de alto contraste.

El fundamento de esta etapa se basa en las características espaciales de la señal una vez umbralizada y en el procesamiento morfológico en imágenes binivel. Llegado a este punto, la información que se tiene es una imagen binarizada, por lo que se trata ahora de diseñar los filtros binarios tal que eliminen las falsas alarmas y mantengan las señales que provienen del defecto. En definitiva, disminuir la probabilidad de falsas alarmas de la etapa de decisión, sin distorsionar la información del defecto, discutida en el anterior punto. Los filtros binarios son probablemente una de las formas más comunes de aplicación del procesamiento morfológico. Aunque la Morfología es el estudio de formas y está ampliamente desarrollado desde el punto de vista matemático, en la práctica de SIVA sólo se suele emplear una pequeña parte, consistente en la secuencia de operaciones de erosiones y dilataciones sobre imágenes. Serrano [Serran95], Silva [Silva92], Ohta [Ohta86] y Takatoo [Takat88] han utilizado procesamiento morfológico para la detección de defectos, aunque éstos no han dado detalles sobre el método empleado, el tipo de elemento estructurante utilizado o las prestaciones de sus operaciones efectuadas.

El plan a seguir va estar formado por cómo eliminar falsas alarmas y cómo reconstruir el defecto a partir de las semillas de píxeles de alto contraste. Ambas operaciones van a basarse en operaciones de morfología.

### 4.4.1 Eliminación de falsas alarmas

En general, los píxeles de falsas alarmas pueden ser diferenciados de los de alto contraste, después de la umbralización, por su distribución espacial. En el caso de los píxeles de alto contraste al pasar el umbral formarán un grupo de píxeles contiguos, mientras las falsas alarmas se encuentran dispersas espacialmente en la imagen binarizada. Esta premisa básica fue explotada por Abbasszadeh [Abbas93] para el desarrollo de su algoritmo STAD. Si la variable del fondo es aleatoria y no muestra correlación espacial entre píxeles adyacentes, derivará que las falsas alarmas se distribuyan azarosamente en el espacio de la imagen segmentada. En cambio, por la constitución del defecto habrá varios píxeles de alto contrastes adyacentes entre sí, formado un grupo o *cluster* de píxeles en el espacio transformado por la umbralización.

Esta propiedad puede ser detectada por las técnicas de procesamiento morfológico. Así, un erosionado de la imagen binaria eliminará píxeles aislados, dejando sólo aquellos que formen grupos. Si después se dilata la imagen obtenida, el resultado será una imagen al

que se ha borrado los píxeles aislados, esto es, la eliminación de falsas alarmas precisa de una operación *opening*. El elemento estructurante dependerá de la forma de los defectos y de la textura del material a inspeccionar.

#### 4.4.2 Reconstrucción del defecto

La filosofía desarrollada sobre detección de defectos se basa en la localización de píxeles de alto contraste, en el fundamento de que los defectos están constituidos por píxeles de medio y alto contraste. Una vez que han sido localizados los píxeles de alto contraste, habrá de reconstruir el defecto a partir de estas semillas. Para este objetivo también se servirá del procesamiento morfológico binivel.

Obviamente, por la propia definición dada de píxeles de medio contraste, éstos serán más próximos al nivel medio de gris de la imagen que los píxeles de alto contraste. Si el fondo sigue una distribución normal, la determinación de píxeles de medio contraste estará dada por la expresión:

$$u_{MC} = \mu \pm k_{MC} \sigma \quad (4.96)$$

Donde  $k_{MC}$  será menor que  $k_{AC}$  en términos absolutos. Este actuar necesita de este segundo umbral,  $u_{MC}$ , capaz de detectar píxeles de medio contraste. Pero al umbralizar no sólo pasarán píxeles del defecto sino además del fondo, como consecuencia de la variabilidad de la textura del material. No obstante, la

**Tabla 4.2 Algoritmos de reconstrucción de los defectos**

**Método 1**

$k=1;$

$G_k' = (G_{AC} \oplus H) \cap G_{MC}$

Do {

$G_{k+1}' = (G_k \oplus H) \cap G_{MC};$

} While( $G_{k+1}' - G_k' \neq 0$ )

**Método 2**

$G_k' = (G_{AC} \oplus H) \cap G_{MC}$

definición previa de los píxeles de alto contraste, permitirá distinguir qué parte depende al defecto y qué otra pertenece al fondo. La reconstrucción del defecto está basada en las dos imágenes resultantes de la doble umbralización,  $u_{AC}$  y  $u_{MC}$ , junto con la aplicación de las técnicas de procesamiento morfológico, llamada dilatación condicionada. Dos algoritmos han sido diseñados con este objetivo. La tabla 4.2 muestra los quehaceres de estas reconstrucciones. Sean  $G_{AC}$  y  $G_{MC}$  las imágenes binarias de píxeles de alto y medio contraste, respectivamente y  $H$  el elemento estructurante. El segundo algoritmo es una simplificación del primero. Este primero resulta más correcto pero consume más tiempo que el segundo. Se basa en la dilatación de la imagen de píxeles de alto contraste con la intersección de píxeles de medio contraste. Cuando este proceder se vuelve idempotente, se habrá finalizado la reconstrucción del defecto. El segundo método sólo se efectúa una sola vez.

## 4.5 Medida de calidad de un procedimiento para la detección de defectos locales

---

Ante la pregunta ¿cuál de los procesados a realizar resulta el más conveniente para el realce del defecto?, la respuesta no es inmediata, pues la evaluación debe ser hecha en la totalidad del bloque de detección y no sólo en la etapa de procesado de la imagen. La medida de separación entre defecto y fondo no es cuestión exclusiva de la capacidad de realce, sino también del tipo de segmentación y del post-procesado que vaya a ejecutarse.

Para poder explicar el intrincamiento de los tres bloques, se va a desarrollar un conjunto de medidas, con el propósito de ir desgranando el problema hasta encontrar una metodología que sea capaz de calibrar cuál es el mejor procedimiento de detección.

### 4.5.1 Medidas basadas en el error de Bayes

Éstas se basan en las funciones de densidad de la intensidad de defecto y el fondo. El fundamento básico está en el error originado al aplicar un umbral para la clasificación de los píxeles entre defectuosos o fondo.

En un primer acercamiento a la medida, y desde el punto de vista intuitivo, se dirá que existe mayor contraste entre defecto y fondo, cuanto mayor separación exista entre la función de densidad del defecto respecto del fondo. Desde el punto de vista de Bayes, esta idea puede ser expresada en forma de error de clasificación. En otras palabras, se está equiparando el nivel de contraste con el error de clasificación entre fondo y objeto.

Una definición más formal sobre el contraste podría ser, que partiendo de un defecto con una única tonalidad, sin pérdida de generalidad, y teniendo en cuenta  $p(q|D)$  y  $p(q|F)$ , el nivel de contraste para un defecto o el error de clasificación, para un determinado umbral,  $u$ , podrá ser definido como:

$$c(u) = c_1 \sum_{q=u+1}^{Q-1} p(q|D)p(D) + c_2 \sum_{q=0}^u p(q|F)p(F) \quad (4.97)$$

siendo  $c_1$  y  $c_2$  dos constantes que ponderan el coste de tener área de defecto sin detectar y de masa proveniente de falsas alarmas. En el caso de defecto de tonalidad clara, la expresión (4.97) sólo será modificada en los intervalos de integración, quedando como :

$$c'(u) = c_1' \sum_{q=0}^{u-1} p(q|D)p(D) + c_2' \sum_{q=u+1}^{Q-1} p(q|F)p(F) \quad (4.98)$$

Cuando el valor de  $c$  tienda a ser nulo indicará que el contraste entre el defecto y el fondo, para el umbral  $u$ , tenderá a ser el acertado. Tal como se ha comentado, es

observable como de una manera directa, este nivel de contraste depende del tipo de umbralización, al estar vinculado el índice de contraste con el valor de nivel de gris de segmentación,  $u$ .

Si las dos distribuciones son normales, la distancia de Bhattacharyya puede ser empleada como medida de contraste, al ser ésta un índice superior del error de Bayes. Por tanto, a mayor distancia mayor contraste; expresándose esta medida en función de las medias y las varianzas de las dos funciones de densidad, quedando reflejada en:

$$d_c = \frac{1}{8} \frac{(\mu_D - \mu_F)^2}{\left( \frac{\sigma_D^2 + \sigma_F^2}{2} \right)} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\frac{\sigma_F^2 + \sigma_D^2}{2}}{\sqrt{\sigma_F^2 \sigma_D^2}} \right) \quad (4.99)$$

donde  $\mu_F$  y  $\mu_D$  son las medias de las distribuciones de niveles de grises del fondo y el defecto, mientras  $\sigma_F$  y  $\sigma_D$  corresponden con las varianzas de éstas.

No obstante, esta medida de contraste basada en el error de Bayes, sólo considera la información sobre la distribución de niveles de grises. No hay ninguna referencia sobre la distribución espacial del fondo ni la del defecto. La falta de estimación sobre la distribución espacial de los píxeles es un gran handicap para esta medida. Así el nivel de falsas alarmas, si bien es conocido, no hay conocimiento de cómo se reparte en el espacio, y esta información es vital para las etapas de post-procesado. De hecho, la etapa de post-procesado no es considerada en este nivel de medida. En la práctica, se observa que existen procesados con bajos rendimientos sin etapa de post-procesado, pero aumenta considerablemente al aplicar una etapa de eliminación de falsas alarmas. Y viceversa, realizados de gran contraste en el procesado, tienen mal comportamiento en la eliminación de falsas alarmas.

Además, el concepto utilizado de masa defectuosa no detectada, no es del todo cierto, pues como ha sido comentado, es posible la reconstrucción de la masa de defecto con operaciones de post-procesado.

Las carencias de esta medida se evidencian al no considerar las distribuciones espaciales tanto del defecto como de las falsas alarmas. Esta medida es incompleta y genera errores. Para paliar estas dificultades se hace propuesta de una nueva metodología de medida de la capacidad de detección.

#### 4.5.2 Medidas basadas en las funciones de distribución de los defectos de píxeles de alto contraste

El carácter incompleto de la medida anterior venía dado por, uno, la falta de información sobre la distribución espacial, dos, la no utilización del concepto de pixel de alto contraste y tres, el tipo de post-procesado que va a realizarse.

Al considerar que para la detección de un defecto local es necesario que exista al menos un píxel de alto contraste capaz de superar el umbral, se está definiendo el proceso de detección en su globalidad. El proceso de detección queda definido por una etapa de realce, a saber, con la máscara más adecuada, una segmentación con un determinado umbral,  $u$ , y una eliminación de falsas alarmas basada en erosiones, cuyo elemento estructurante es una de las variables del proceso. Todo ello deberá de decantar los píxeles de alto contraste, al que luego seguirá una etapa de reconstrucción del defecto.

Las medidas de contrastes, por tanto, se basarán en las funciones de distribución obtenidas de píxeles de altos contrastes que quedan después de haber aplicado el proceso de realce, segmentación y de posible erosionado, tanto para el defecto como para el fondo. Mediante este modo de actuar han quedado definidas,  $p_{AC}(u)$  y  $p_{FA}(u)$  como las funciones de distribución de píxeles de alto contraste del defecto junto al fondo, esto es, la probabilidad acumulada de tener píxel de alto contraste hasta el nivel  $u$ , después de haber sido aplicadas las tres etapas.

Bajo este perfil, se han definido las siguientes medidas:

1. Valor de  $p_{FA}(u_1)$  tal que  $p_{AC}(u_1)$  sea igual a 1. El valor de  $u_1$  será el menor/mayor umbral, según tonalidad, que garantice la detección al 100 % de los píxeles de alto contraste. Esta medida indica el nivel de falsas alarmas cuando se detecta el 100 % de defectos.
2. Valor de  $p_{AC}(u_2)$  para un valor de  $u_2$  tal que la probabilidad de falsas alarmas sea cero,  $p_{FA}(u_2) = 0$ . El nivel de umbral de  $u_2$  para tonalidades oscuras será el valor mayor de éste, tal que un incremento en el nivel de gris  $u_2$ , convierta a  $p_{FA}(u_2)$  distinta de cero. Para el caso de defectos claros, el umbral  $u_2$  será el menor tal que un decremento en el nivel de gris  $u_2$ , convierta a  $p_{FA}(u_2)$  distinta de cero. Esta medida indicará el nivel de éxito de detección de los defectos sin aparición de falsas alarmas.
3. La máxima discrepancia entre  $p_{AC}(u)$  y  $p_{FA}(u')$ .

Las medidas 1) y 3) tienen el inconveniente de dar sus valores sobre el tanto por ciento de falsas alarmas semillas. Pero recuérdese que al superar el umbral van a ser utilizadas como píxeles de *full-contrast*, y por lo tanto alrededor de ellas habrá un proceso de reconstrucción. Por eso, es preferible tener una apreciación más conservadora, correspondiente a 2).

Podría pensarse en vez de utilizar la fase de determinación de las semillas, hacerlo sobre la imagen resultado, es decir, al finalizar la etapa de decisión, donde los verdaderos defectos y las falsas alarmas son etiquetadas. La ventaja de esta medida, es que considera el proceso de decisión en su globalidad, desde el realce hasta la reconstrucción de las semillas. Igualmente se proponen las tres medidas anteriores, pero ahora habrá de utilizar la probabilidad de defecto detectado,  $p_{DD}$ , y de falsas alarmas reconstruidas,  $p_{FA}$ . No obstante, los resultados pueden ser similares a la anterior medida, esto es, a las magnitudes



basadas en semillas tanto de píxeles de alto contraste como de falsas alarmas, pues en la reconstrucción de los defectos serán proporcionales las áreas aditivas alrededor de estas semillas.

Nótese que estas medidas son hechas al no tener conocimiento a priori de los costes de falsas alarmas,  $c_{FA}$ , ni del precio de falta de detección del defecto,  $c_{DD}$ . Será el usuario final el que pueda determinar el valor óptimo a partir de la función de coste oportuna.

## 4.6 Diseño del sistema de detección de defectos locales en la pasta de papel

El método de detección de defectos propuesto ha sido implementado en la localización de faltas locales en la pasta de papel. Si bien en el capítulo 7 se hablará con todo detalle del proceso de producción de pasta de papel y el origen de los defectos locales, es necesario recordar aquí los conceptos básicos. En este material hay dos tipos básicos de defectos, llamados *pitch* y *shives*. Aun habiendo otros, su probabilidad de aparición es escasa y no se han considerado, pues no son relevantes en la calidad del papel, y de hecho, sólo los *pitch* son verdaderamente importantes, tal como se argumentará con posterioridad. Todos los defectos tratados presentan una tonalidad oscura en luminancia respecto al fondo. Los defectos se clasifican según su tamaño, habiendo cuatro tipos denominados con las iniciales A, B, C y P. La tabla 4.3 indica los intervalos utilizados para la clasificación basados en los intervalos de áreas, además muestra el % de aparición de cada tipo y el % del área total defectuosa<sup>2</sup>.

**Tabla 4.3 Clasificación de los defectos en la pasta de papel**

Tipo de defecto	Área de las motas(mm <sup>2</sup> )	Aparición ( <i>pitch</i> ) %	Área ( <i>pitch</i> )%	Aparición ( <i>shive</i> )%	Área ( <i>shive</i> )%
-	Menores a 0.04 (no se encuentran)	-	-	-	-
P	Entre 0.04 y 0.1	44%	13%	9%	1%
C	Entre 0.1 y 0.3	38%	29%	33%	8%
B	Entre 0.3 y 0.8	15%	35%	30%	22%
A	Mayores a 0.8	3%	23%	29%	69%

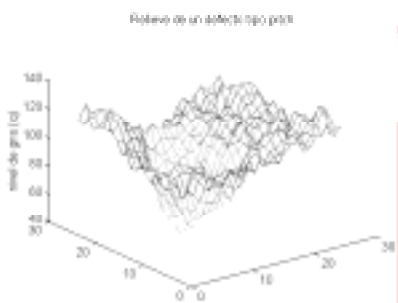
<sup>2</sup> Estos datos emanan del universo entregado a través de 32 pliegos con más de 230 defectos

Una vez dada esta breve y primera impresión sobre el problema a resolver se plantean la trayectoria marcada en este capítulo para la detección de faltas en la pasta de papel, constituida por cuatro fases:

1. Tipo de realce. Estudiando desde el uso de filtros lineales hasta el empleo de técnicas de procesamiento morfológico.
2. La estrategia de segmentación. Para este caso y dada la facilidad de obtención de muestras, se ha optado por una táctica de observador inverso de Neyman-Pearson. Por lo que habrá de intentar modelar las funciones de densidad tanto del fondo como de los defectos.
3. Validación de las hipótesis de normalidad de la señal del fondo. En caso contrario, buscar otro modelo de función de densidad.
4. Y por último, fijar los parámetros del sistema de detección mediante las medidas de calibración explicadas. Este proceso determinará: Filtro lineal o no lineal, modelos de máscaras o elementos estructurantes, tipo de umbral, operaciones de post-procesado y reconstrucción de semillas, dando un nivel de falsas alarmas y de defectos localizados.

El primer paso consistirá en la determinación de las posibles operaciones lineales o no que aumenten el realce de los defectos. Las máscaras de convolución a testear salen de la bibliografía especializada y del método propuesto mediante correlación de variable cualitativas (explicado en 4.2.3). Respecto al procesado morfológico se exploran las transformaciones *top-hat*. En segundo lugar, las estrategias de segmentación se basan en el análisis del histograma, al validarse la normalidad de distribución en niveles de grises. Por último, se procederá a la calibración de los parámetros. En los párrafos siguientes se desmenuza este proceder sobre la inspección en la pasta de papel.

#### 4.6.1 Realce de los defectos locales en la pasta de papel



**Figura 4.15 Relieve de un defecto tipo pitch**

Como ya se ha dicho, los defectos de la pasta de papel analizados tienen una apariencia oscura respecto al fondo. Desde el punto de vista de las formas, sus tendencias son a ser elípticos. Y en cuanto a la distribución de los niveles de grises, es decreciente de manera convexa, a modo de agujero. La figura 4.15 ilustra el aspecto tanto espacial como en niveles de grises de los defectos en la pasta de papel.

Este conocimiento a priori permite determinar algunas propiedades sobre la máscara de convolución. El carácter convexo de la forma del defecto junto el uso de máscaras simétricas, para evitar trasladar el centro de gravedad

en niveles de grises del defecto, orienta ambas razones a utilizar simetría par en las cuatro direcciones. En cuanto al tamaño de las máscaras, depende tanto del algoritmo como del número de píxeles que representan el defecto. El tipo de algoritmo para la detección, se basa en la localización de píxeles de alto contraste. Respecto a la resolución tomada es aproximadamente de  $0.015 \text{ pixel/mm}^2$ , y según la base de datos, los defectos están en subimágenes que tienen tamaños desde  $3 \times 2$  hasta más de  $15 \times 14$ , correspondientes a defectos que van desde el tipo 'P' hasta 'A'. Por tanto, el tamaño de la máscara debe ser tal que al situarse su centro sobre un pixel de alto contraste, los píxeles adyacentes fuesen otros de alto y medio contraste. La motivación está en que los coeficientes de la máscara encuentren correlación con los defectos. Por las características morfológicas deberían ser de  $3 \times 3$ . Mayores tamaños podrían desfigurar el realce de los defectos más pequeños, pues tomaría en la convolución píxeles del fondo. No obstante, el área de los defectos mayores representa casi un 90% del área total para los *pitch* y un 99% para los *shives*, según se desprende de la información de la tabla 4.3. Por lo que podría considerarse entornos de vecindad  $5 \times 5$ , incluso mayores. Para máscaras de mayor tamaño podrán ser obtenidas como proceso de aplicación de la propiedad asociativa de la convolución, esto es, para su decantación se pasará aplicar dos o más etapas de procesado con máscaras  $3 \times 3$  ó  $5 \times 5$ . Concluyendo, por el carácter convexo de los defectos, por la resolución tomada y por el algoritmo a emplear, las máscaras a utilizar son del tipo representado por:

$$H_1 = \begin{bmatrix} cbc \\ bab \\ cbc \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} ecd \\ bab \\ dce \end{bmatrix} \quad H_3 = \begin{bmatrix} fedef \\ ecbce \\ dbabd \\ ecbce \\ fedef \end{bmatrix} \quad H_4 = \begin{bmatrix} jihkl \\ fecdg \\ dbabd \\ gdcef \\ lkhi j \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

Al no haber direcciones privilegiadas en la orientación de los defectos, los filtros lineales deberán ser isotrópicos. Para observar la tendencia de isotropía se realizará respuesta en frecuencia de las máscaras, de este proceder quedará reflejado la variación de ganancia en cualquier dirección.

La determinación de los coeficientes de la máscara se hace considerando el grado de correlación entre ésta y la forma del defecto. Al utilizar el método de correlación lineal con variable cualitativa, el problema de localización de los coeficientes se convierte en la determinación del hiperplano de separación entre defecto y fondo. Con tal propósito se construye la matriz de diseño  $G^*$ , constituida por vectores asociados al defecto y al fondo. El tamaño del vector de características viene definido por el tipo de máscara. La utilización de simetría par y defectos de carácter convexo, hace que estos espacios sean de dimensión 3 ó 5 para máscaras de  $3 \times 3$ , mientras para máscaras de  $5 \times 5$  serán de 6 u 11, véase (4.100). Los vectores de los defectos están constituidos por la información de los píxeles de alto contraste y sus adyacentes, dependiendo del tamaño de la máscara. En cambio, los vectores del fondo serán una población representativa de su función de densidad. De otro lado,  $G^{*'}$  estará formado por ceros y unos. Cero donde corresponda con un vector del fondo y uno cuando se le asocie un vector defecto, recuérdese la figura 4.7. No obstante, asignación de  $G^{*'}$  contraria, dará el mismo resultado en términos absolutos pero de signo contrario. Al desearse justamente que cuando exista defecto, su nivel de gris sea menor,

mientras que con píxeles del fondo se mantenga o aumente, se fija cero en el defecto y uno en el fondo.

Debido a las características propias de cada cámara e iluminación, correspondientes al sistemas de adquisición de imágenes del papel, las muestras tomadas requieren de un proceso de normalización. De esta forma, se puede crear una población de defectos y fondos comparables entre si. La unificación de las muestras ha sido realizada mediante la traslación de las imágenes a igual media para todo el universo. Este proceder se justifica en la medida de que todas las imágenes capturadas tienen similar varianza pero diferente media, lo que viene a indicar que la variabilidad de la información está definida por la textura del material y que con sólo corregir la intensidad lumínica se hacen comparables las muestras.

Una vez preparadas las muestras, se pasará a determinar los coeficientes por el método Logit. El resultado corresponderá con la variación de correlación entre la máscara y el entorno de vecindad. Por dicho motivo habrá de sumar además de la ponderación oportuna de la correlación, el nivel de gris de los píxeles. La ponderación del resultado logit dependerá del nivel de discretización de la señal, evitando que se produzca saturaciones. De esta forma quedará definida la máscara, sólo resta colocar los coeficientes para que sean efectuados de forma eficiente por el procesador, esto es, próximo a potencias de  $2^n$ . En la tabla 4.4 se expone un ejemplo. También se empleará otras máscaras como las correspondientes a filtros binomiales, por ser muy extendido dentro de la bibliografía SIVA.

**Tabla 4.4 Resultados del método logit para una máscara 3x3**

Resultado logit	Suma del vector	Máscara optimizada
(0.49 -0.03 -0.008 -0.14 -0.06)	(1.49 -0.03 -0.008 -0.14 -0.06)	$\frac{1}{32} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -1 & 48 & -1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Respecto al procesamiento morfológico, si se desea realzar defectos de tonalidad oscura se precisa de transformaciones *top-hat*, ver 4.2.4.2.4. Un estudio de la base de datos de los defectos muestra que los píxeles de alto contraste son pocos y próximos entre si, por lo que sugiere utilizar elementos estructurantes de conectividad 4 píxeles en cruz, por ser los más próximos o bien probar con conectividad de 8 vecinos. En mayor tamaño podría pensarse en 11 e incluso 24 vecinos. La ecuación ( 4.101 ) muestra los elementos estructurantes propuestos.

$$H_1 = \begin{bmatrix} 010 \\ 111 \\ 010 \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} 111 \\ 111 \\ 111 \end{bmatrix} \quad H_3 = \begin{bmatrix} 00100 \\ 01110 \\ 11111 \\ 01110 \\ 00100 \end{bmatrix} \quad H_4 = \begin{bmatrix} 11111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 11111 \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

En cuanto a las medidas de realce se ha utilizado, las distancias de Bhattacharyya y medidas relacionadas con las funciones de distribución tanto de píxeles de alto contraste como de falsas alarmas, tal como fue comentado en 4.5.2. Por lo que se necesita estudiar la viabilidad de normalidad de las distribuciones.

#### 4.6.2 Validación de las hipótesis de normalidad

Se va a intentar validar la normalidad de la señal del fondo. Mientras que la función de distribución de los píxeles de alto contraste, es posible conseguirla, gracias a un conjunto extenso de muestras superiores a 230 defectos distintos.

En la tabla 4.5 se presentan los resultados de validación de normalidad sobre la señal del fondo y la distribución de píxeles de alto contraste,  $\alpha_F$  y  $\alpha_{AC}$ . Para el caso de las convoluciones, esto es, de procesamiento lineal, si la señal captada sigue una distribución normal, la procesada también tendrá una función de densidad normal. No obstante, el carácter discreto de los datos, puede generar una dispersión de los valores que provoquen saturaciones, tanto por el valor inferior como superior, rompiendo con la modelización prevista. Obsérvese que la distribución del fondo si es normal, no así la densidad de los píxeles de alto contraste. Si de filtros no lineales se trata, habrá que estudiar su normalidad pasada la etapa de realce, pues es esta imagen la que será posteriormente segmentada. Las especificaciones de los parámetros del test fueron vistas en 4.3.4.1.

El modo de actuar consistió en tomar las imágenes procesadas, siendo unas muestras lo suficientemente extensas para la validación rechazo de la hipótesis. De éstas se extraen sus histogramas y se calculan los coeficientes de asimetrías y apuntamientos, determinándose mediante el test de Jarque y Vera el índice de confianza. Además, sobre estas imágenes se calcula el centro de gravedad para observar que las falsas alarmas se distribuyen de manera aleatoria en todo el espacio de la imagen captada, mostrando con ello una iluminación uniforme y la posibilidad de tomar umbrales globales.

En la tabla siguiente se ilustra algunas de las más de veinte máscaras probadas, junto con sus parámetros, niveles de confianza y distancia de Bhattacharyya. Hay máscaras de 3x3 y de 5x5 según (4.100), además se muestran diferentes resultados de aplicar la correlación ponderada con el nivel de gris.

Tabla 4.5 Máscaras de procesado

Máscara	Funciones de densidad	Respuesta en frecuencia	Parámetros						
			$\mu_F$	$\sigma_F$	$\mu_{AC}$	$\sigma_{AC}$	$\alpha_F$	$\alpha_{AC}$	$d_B$
-			178	13	83	25	0.4	0.04	3
$\frac{1}{32} \begin{pmatrix} -8 & -1 & -8 \\ -1 & 64 & -1 \\ -8 & -1 & -8 \end{pmatrix}$			156	18	43	29	0.3	0.24	2.7
$\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 12 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$			178	16	69	28	0.4	0.04	3
$\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$			178	11	98	24	0.4	0.1	2.5

$\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ -1 & 32 & -1 \\ -6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$			157	18	43	29	0.1	0.25	2.6
$\frac{1}{32} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -1 & 48 & -1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$			189	16	76	28	0.5	0.04	3
$\frac{1}{32} \begin{pmatrix} -8 & 3 & -8 & 3 & -8 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ -8 & 2 & 56 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ -8 & 3 & -8 & 3 & -8 \end{pmatrix}$			156	22	16	35	0.3	0.1	2.8
$\frac{1}{64} \begin{pmatrix} -8 & 2 & -8 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & 85 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & -8 & 2 & -8 \end{pmatrix}$			136	17	28	27	0.4	0.09	3

La primera conclusión que se puede aportar de esta tabla es la suficiencia de la distribución del fondo como normal, no siendo así para el caso de los píxeles de alto contraste. Y como corolario la no validez de la distancia de Bhattacharyya, pues la distribución de los píxeles de alto contraste no sigue la normalidad. De otro lado, las máscaras obtenidas de la correlación muestran una tendencia a favorecer las componentes de alta frecuencia.

#### 4.6.3 Parámetros del sistema de detección de defectos

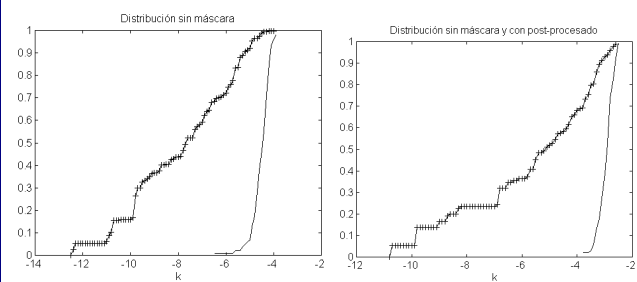
La determinación de los parámetros del sistema de detección vendrán dados de manera experimental, mediante el calibrado del conjunto de muestras a partir de las medidas explicadas en 4.5. Sobre la base de datos de que se dispone, y para cada estrategia de detección basada en etapa de realce, umbralización y post-procesado, se calcula la función de distribución de los píxeles de alto contraste y de falsas alarmas en función del

valor de  $k$ . Esta fase de calibración definirá la etapa de realce, el umbral  $u^*$  y por ende  $k^*$ , junto al tipo de postprocesado.

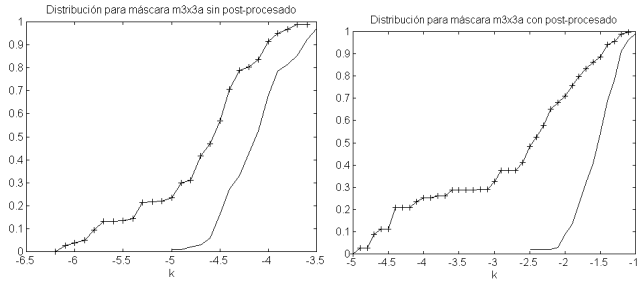
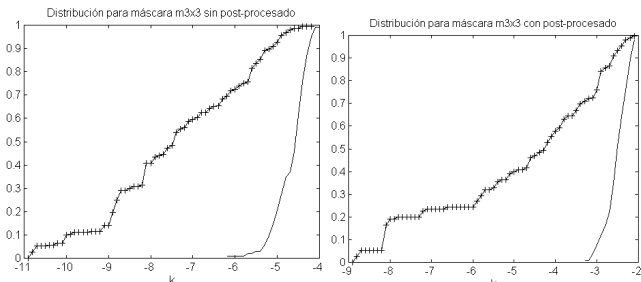
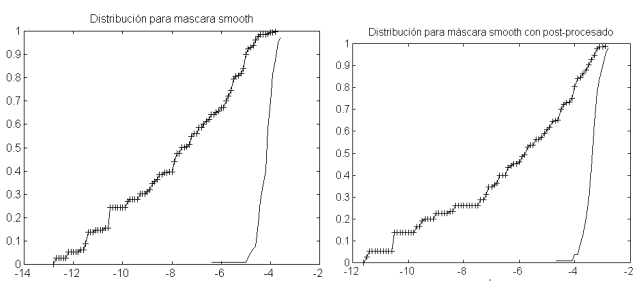
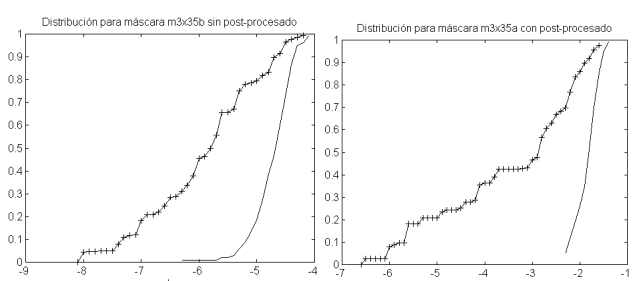
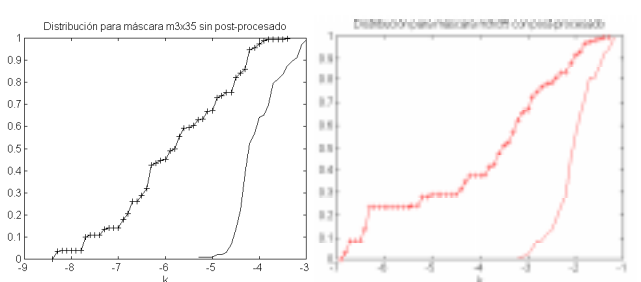
Para el caso de la pasta de papel, los píxeles de alto contraste vendrán ponderados por el tipo de defecto, pues éstos se clasifican atendiendo al tamaño de sus defectos. No es lo mismo un pixel de alto contraste de un defecto de tipo P que otro de tipo A, pues los primeros sólo representan un  $0.04 \text{ mm}^2$  y los segundos un  $\text{mm}^2$ , según se vio en la tabla 4.4. A continuación se presentan los resultados de las distintas estrategias de detección de defectos. En la Tabla 4.6 aparece en la primera columna el tipo de procesado, en la segunda las funciones de distribución de los píxeles de alto contraste ponderados y falsas alarmas con y sin post procesado. El post procesado utilizado ha sido el explicado en 4.4.1 con 8 vecinos. Y las últimas columnas hace referencia a las medidas de probabilidad de detección sin píxeles de falsas alarmas,  $p_{AC}(p_{FA}=0)$ , sin y con post procesado ( - o + ), más la probabilidad de falsas alarmas cuando se detectan al 100 % de los defectos.

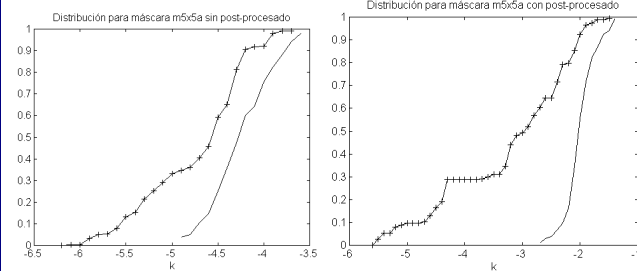
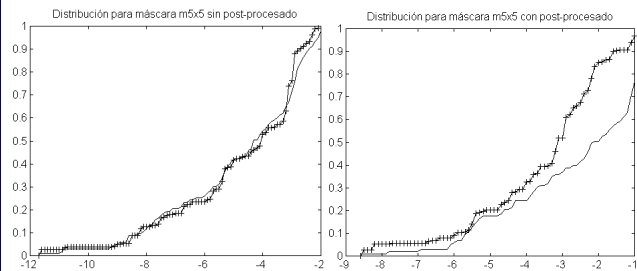
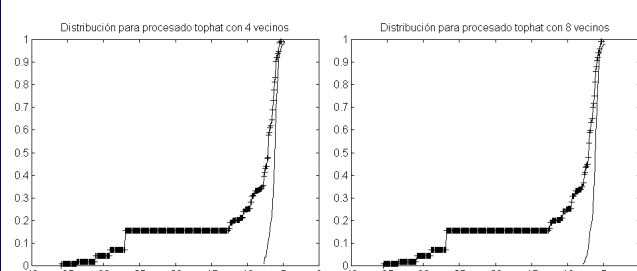
La última fila está reservada al procesado morfológico tipo *top hat*, al que se le aplicado vecindad a 4 y 8 vecinos.

**Tabla 4.6 Resultados de las diferentes estrategias de detección**

Procesado	Funciones de distribución	$p_{AC}(p_{FA}=0)$		$p_{FA}(p_{AC}=1)$	
		-	+	-	+
-		77.6	68.8	55.3	92.2



$\frac{1}{32} \begin{pmatrix} -8 & -1 & -8 \\ -1 & 64 & -1 \\ -8 & -1 & -8 \end{pmatrix}$		29.9	64.9	85.4	91.3
$\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 12 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$		78.3	72.1	61.1	89.3
$\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$		90.1	75.0	69.9	92.2
$\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ -1 & 32 & -1 \\ -6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$		65.8	72.1	96.1	89.3
$\frac{1}{32} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -1 & 48 & -1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$		67.1	65.8	69.9	92.2

$\frac{1}{32} \begin{pmatrix} -8 & 3 & -8 & 3 & -8 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ -8 & 2 & 56 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ -8 & 3 & -8 & 3 & -8 \end{pmatrix}$		33.1	60.3	88.3	76.5
$\frac{1}{64} \begin{pmatrix} -8 & 2 & -8 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & 85 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & -8 & 2 & -8 \end{pmatrix}$		2.6	5.2	95.1	76.7
Top-hat		39.7	40.5	97.1	97.1

De la tabla se desprende que el mejor procesado es la aplicación de un filtro binomial ( *smooth* ) sin aplicación de post procesado, alcanzando un 90.1 % de detección sin falsas alarmas. También se observa que las máscaras obtenidas mediante correlación con variable cualitativa mejoran sus prestaciones de detección cuando se le aplica las etapas de post procesado. Su explicación viene dada por el hecho de que estas máscaras tienen bandas pasantes de alta frecuencia, por lo que píxeles aislados de falsas alarmas luego serán eliminados como consecuencias de la discontinuidad de la materia.

Seguidamente se pasará a calcular el valor del segundo umbral,  $k_{MC}$ , tal que a partir de las semillas reconstruya el defecto, según se explicó en 4.4.2. La forma de actuar consistirá una vez localizadas las semillas y conocido el tamaño del defecto, obtener el valor óptimo de  $k_{MC}$  tal que reconstruya el defecto sin añadir píxeles del fondo. Obsérvese que un valor pequeño de  $k_{MC}$  puede suponer un engrosamiento del defecto, y como resultado un área mayor que la verdadera. Por el contrario, un elevado valor de  $k_{MC}$  puede llevar a la situación contraria.

Por último, faltará determinar la relación de probabilidad de defecto detectado,  $p_{DD}$ , y la de falsas alarmas del sistema de detección. A partir del conjunto de muestras, se puede

calcular la relación entre la masa de defecto detectado y de falsas alarmas para cada valor de  $k$ . Estas funciones son de gran utilidad de cara al producto final, en el que el propio cliente es el que deberá decidir, con su conocimiento del sistema, el coste de la falta de detección y de falsas alarmas.

## 4.7 Conclusiones

---

Se ha presentado un esquema metodológico para la detección de defectos locales en superficies homogéneas y planas. El sistema de inspección se basa en tres etapas: realzado, segmentación y post procesado. Respecto al realzado, se han estudiado los filtros lineales discretos, proponiendo una técnica novedosa basada en el uso de correlación lineal con variables cualitativas. Además también se han explorado técnicas de realce soportado en procesamiento morfológico. En cuanto a la etapa de segmentación fue abordada desde las funciones de densidad en niveles de grises del defecto y del fondo, introduciéndose el concepto de píxeles de alto y medio contrastes. Convirtiendo el problema de umbralización, en la localización óptima del umbral mediante una función de coste, donde se tiene en cuenta los dos errores típicos, defectos sin detectar y falsas alarmas. Las técnicas de post procesado han sido aplicadas con una doble intencionalidad, eliminación de falsas alarmas y reconstrucción de defectos a partir de los píxeles de alto contraste. A continuación se ha definido un conjunto de medidas con el objeto de calibrar cuál es el mejor método de detección de defectos. Éstas se basan en las funciones de distribución en niveles de grises del fondo y de los defectos. Por último, se ha implementado esta metodología para la detección de faltas locales en la pasta de papel. Donde se ha desarrollado experimentalmente la técnica propuesta, dando los resultados de diseño para cada una de las etapas y cómo han sido éstas evaluadas.

# 5

## Análisis de los datos

---

Una vez detectados los defectos locales en la superficie, se determinada la conversión de la imagen segmentada en un vector de características. Existen múltiples técnicas para la obtención de este vector, de esa variedad se ha utilizado los métodos sintácticos y su posterior conversión a vectores de características. Sin embargo, en esta tesis el estudio se ha centrado sobre todo en la etapa de clasificación, dejando sólo constancia de cómo se ha procedido experimentalmente para la formación del vector de características. Los dos siguientes capítulos tienen como objetivo, dar una metodología de actuación en la catalogación de las muestras a partir de la información obtenida de la etapa de detección de los defectos. La idea básica es integrar tanto las técnicas estadísticas como las cognitivas en la resolución del problema. La experiencia ha demostrado que los resultados de la clasificación mejoran sensiblemente con acciones híbridas, y que, sustancial mejora se encuentra en la introducción del conocimiento humano sobre el problema. Los métodos cognitivos presentan las características de aprendizaje mediante ejemplos, y cuyos resultados, algunas veces, no cumplen con los criterios de generalidad y exactitud del sistema. Tienen además inconvenientes en la inserción de conocimiento a priori, y en términos generales, no es posible saber el sesgo y la varianza derivada de un entrenamiento basado en un conjunto finito de muestras. No obstante, son herramientas de gran valor y que deben verse como elementos potentes en el proceso de decisión, pero no exclusivos. Son los métodos basados en la modelización de funciones de densidad los que pueden ayudar y refinar la decisión, por los motivos que van a ser a continuación abordados.

Bajo estas consideraciones, la primera pregunta es: ¿Hay posibilidad de clasificar el universo del problema a partir de un conjunto finito de muestras?. La respuesta es *si*, siempre y cuando exista conocimiento a priori del problema. En la medida de que esta información sea más precisa, más fácil será la construcción del clasificador y más sencillo y rápido la decisión de éste. La pregunta siguiente será ¿Cómo se aborda la introducción del conocimiento previo en el clasificador?. Si se considera, hoy por hoy, que la mejor fuente de búsqueda de modelos es el hombre ¿Cómo puede éste introducir sus conocimientos dentro del computador?. La respuesta se encuentra en dos facetas: la primera conseguir una imagen en el computador que identifique unívocamente las realidades físicas con la información depositada, etapa que fue realizada en la detección de defectos y en la extracción de las características, y la segunda, buscar las relaciones entre las características de los objetos etiquetados como defectuosos, de manera que se pueda aumentar el poder de discriminación entre los distintos tipos de defectos a clasificar.

El método a seguir estará formado, por este primer capítulo encargado de obtener los grupos homogéneos inherentes de los datos de entrada, a partir de los mapas auto organizados y técnicas estadísticas. Mientras en el capítulo siguiente, se abordará la selección de las características y la clasificación mediante métodos estadísticos, cognitivos y técnicas híbridas.

En el análisis de datos se trata de localizar los grupos o *clusters* dentro de la información recogida para su clasificación. Estos grupos forman un conjunto de datos homogéneos entre si y diferentes respecto al resto. Existen múltiples técnicas de *clustering*, como el algoritmo ISODATA [Hall65] o basados en los k-vecinos más cercanos. Por las características del algoritmo de mapas auto organizados, se han explorado las posibilidades que éste tiene para la formación de un método de agrupamiento, no sólo por ser próximo a algoritmos de vecindad sino por la tendencia a representar la función de distribución de la variable de entrada. La búsqueda de subespacios normales liga el análisis de datos con la selección de las características, permitiendo decantar un algoritmos de agrupamiento de tipo paramétrico. Y aunque es en este capítulo donde se habla de transformaciones normalizantes, no se verá concluido el método de parametrización hasta el próximo capítulo, al requerir introducir un estudio previo sobre clasificadores paramétricos y medidas de error.

El planteamiento en este capítulo es el siguiente, en primer lugar se exponen las ideas generales sobre mapas auto organizados (5.1). En segundo lugar, se trata de mostrar las cualidades de los mapas auto organizados de Kohonen para el análisis de los datos (5.2). Seguidamente se estudian las deficiencias del método, para presentar a renglón seguido una nueva metodología, con el objetivo de modelizar el problema mediante funciones de densidad de cada grupo (5.3). Por último, se expone como se ha utilizado el método propuesto en el análisis de datos proveniente de defectos locales en el aluminio colado (5.4).

## 5.1 Análisis de los datos con mapas auto organizados

---

Se pretende ver la posibilidad de utilizar los mapas auto organizados para el análisis de datos. Previamente, se exponen de forma somera, las bases de los mapas y posteriormente se expone la teoría que soporta el análisis de los datos.

En el mapa auto organizado (*self-organizing*) no existe ningún maestro que indique si la red neuronal está operando correcta o equivocadamente, pues no se define ningún tipo de realimentación entre la salida actual y la deseada. Así durante el proceso de aprendizaje, el sistema debe descubrir por si mismo patrones, regularidades, correlaciones o categorías en los datos de entrada, y codificarlos internamente en su estructura.

Los modelos no supervisados tienen un campo de aplicación propio, relacionado en general con el análisis exploratorio de los datos. Estos modelos suelen ser simples, monocapa y con algoritmos sencillos y rápidos, más próximos a la biología. Se pueden clasificar en dos grandes grupos, redes no supervisadas hebbianas, basada en las reglas de Hebb, y modelos auto organizados, denominadas redes no supervisadas competitivas, en las que solamente una neurona ( o un grupo de vecinas ), pueden quedar finalmente activadas.

El SOM o mapa auto organizado de Kohonen fue desarrollado a lo largo de la década de los ochenta por el finlandés Teuvo Kohonen, y representa una continuación natural de la línea de desarrollo de redes competitivas iniciado por von der Malsburg [Malsb73]. Las primeras publicaciones sobre el SOM [Kohon82,Kohon82a] presentaban el diseño de un eficiente y sencillo algoritmo de computador para la auto organización de mapas de rasgos; este algoritmo ha resultado ser una plataforma muy importante para multitud de aplicaciones.

### 5.1.1 Mapas Auto organizados

La idea de los mapas auto organizados (SOM = *Self-Organizing Maps*), surgió del deseo de modelar la organización de los tejidos cerebrales. Se ha establecido experimentalmente que en el cortex de los animales superiores existen zonas donde las neuronas detectoras de rasgos se encuentran topológicamente ordenadas. La corteza cerebral parece estar ordenada desde varios puntos de vista y niveles de abstracción. Los centros responsables de actividades diversas como la visión, el oído, las funciones motoras, etc. yacen en zonas específicas de la corteza, y estas zonas guardan entre ellas una cierta topología. Asimismo, las zonas individuales muestran una ordenación respecto a su funcionalidad. Un ejemplo de ello es el mapa tonotópico de las regiones auditivas, en el cual neuronas próximas entre si responden a frecuencias de sonido similares según una sucesión ordenada, desde los tonos más altos a los más bajos. Las regiones tales como el mapa tonotópico, suelen recibir el nombre de mapas de correspondencias ordenadas de características. El algoritmo de Kohonen surgió del deseo de modelar la manera natural en que se desarrollan estos mapas de características ordenadas.

#### 5.1.1.1 Arquitectura

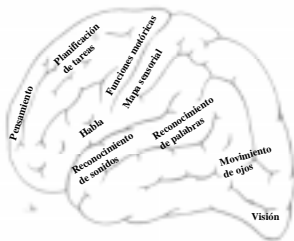


Figura 5.1 Áreas de influencia

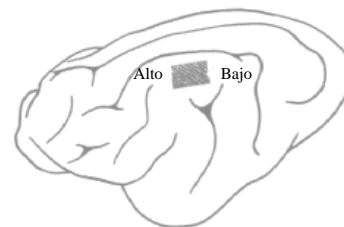
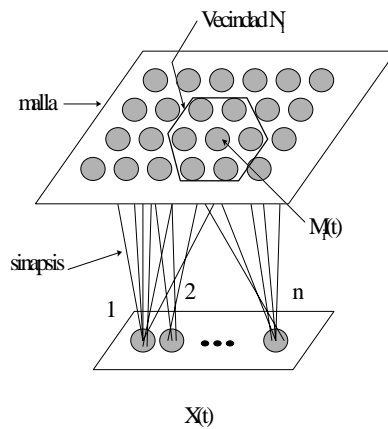


Figura 5.2 Mapa tonotópico (de gato)

La arquitectura general de un SOM puede describirse de la siguiente manera: se tiene un conjunto de  $N$  nodos (neuronas)  $I = \{1, 2, \dots, N\}$ , los cuales se disponen en una malla, generalmente de una, dos o tres dimensiones. A cada nodo  $i$  de esa malla (usualmente conocida como capa de competición), se le asocia un vector de peso  $M_i = [\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{in}] \in \mathbb{R}^n$ . La forma de la malla puede ser definida rectangular, hexagonal o incluso irregular. Dentro de la malla se define un conjunto de vecindad  $N_i$  alrededor del  $i$ -ésimo nodo, que puede adoptar diversas formas. La entrada es un vector  $X(t) = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$  que se conecta, en el caso más sencillo, en paralelo a todas las neuronas de la malla de competición (pueden haber otros esquemas de conexión). El peso de conexión entre la neurona  $M_i$  y el  $j$ -ésimo componente de la señal de entrada viene dado por  $\mu_{ij}$ .



**Figura 5.3 Arquitectura SOM**

### 5.1.1.2 El algoritmo

El objetivo del algoritmo de Kohonen consiste en adaptar los pesos  $\mu_{ij}$  de las neuronas de la malla, según una regla de aprendizaje no supervisado, hasta conseguir una malla “ordenada” topológicamente, en el que cada neurona está especialmente sensibilizada en un dominio de la señal de entrada.

La modificación de los pesos  $\mu_{ij}$  se realiza selectivamente de acuerdo al siguiente criterio: Al encontrar el nodo ganador, se modifica el peso de éste y de todos aquellos que se encuentran dentro del conjunto de vecindad definido (verdadera aportación de Kohonen en el aprendizaje competitivo). El nodo ganador es el nodo de la malla que, en alguna métrica, está más cerca o mejor “casa” con la entrada que se presenta en el ciclo de modificación (aprendizaje).

El algoritmo de Kohonen puede ser expresado por un conjunto de pesos, los cuales se repiten iterativamente hasta conseguir un “orden topológico” en la capa de competición (fase de aprendizaje). Una vez conseguido el orden, se continua aplicando el algoritmo para afinar los pesos de los nodos ya ordenados (fase de convergencia). En esta etapa, la topología de la red se preserva, esto es, el mapa conserva su distribución a pesar de continuar sometiendo a la red, a nuevos ciclos de aprendizaje.

Los pasos del algoritmo son:

1. *Inicialización de los pesos*: En un principio,  $t = t_0$ , la red se encuentra en un estado inicial desordenado, los pesos de los nodos de la capa de competición toman valores aleatorios.



2. *Presentación de la entrada*: Es presentado a la red un vector de entrada aleatorio  $X(t) \in \mathfrak{R}^n$ .

3. *Búsqueda del nodo ganador*: El vector de entrada  $X(t)$  se compara con todos los vectores de referencia  $M_i(t)$ , hasta encontrar el nodo  $M_c$  más cercano o que más “case” con el vector de entrada  $X$ . Es utilizado frecuentemente la métrica euclídea, pero puede utilizarse otro tipo de métrica.

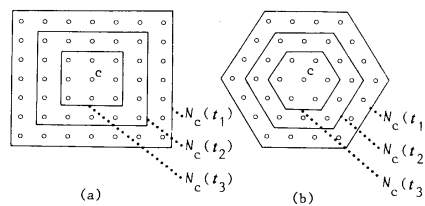
$$\|X(t) - M_c(t)\| = \min_i \|X(t) - M_i(t)\| \quad (5.1)$$

4. *Modificación de los pesos*: Los pesos de los nodos de la capa de competición son modificados según la ley de aprendizaje

$$M_i(t+1) = M_i(t) + h_{ci}(t)[X(t) - M_i(t)] \quad (5.2)$$

la función  $h_{ci}$  se conoce como función de vecindad, y juega un papel central en el desempeño del algoritmo. Mantiene el aspecto de un “kernel” (rejilla) de radio de acción que actúa sobre la neurona ganadora y sus vecinas seleccionadas. Para la convergencia del proceso de aprendizaje, es necesario que  $h_{ci}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Usualmente  $h_{ci}(t) = h_{ci}(\|r_c - r_i\|, t)$  donde  $r_c, r_i \in \mathfrak{R}^2$ , correspondientes al vector de localización de los nodos de la malla; tal que con incrementos de  $\|r_c - r_i\|$  decrezca  $h_{ci} \rightarrow 0$  espacialmente.

En la literatura de los SOM hay dos tipos básicos de función de vecindad. La más simple está basado en el conjunto de vecindad  $N_c$ , estableciéndose que  $h_{ci}(t) = \alpha(t)$  si  $i \in N_c(t)$ , en caso contrario  $h_{ci}(t) = 0$  para  $i \notin N_c(t)$ . El valor de  $\alpha(t)$  es identificado como el factor de aprendizaje ( $0 < \alpha(t) < 1$ ). Ambos  $\alpha(t)$  y  $N_c(t)$  son monótonos decrecientes en el tiempo (ver Figura 5.4 )



**Figura 5.4 Conjunto de vecindad**

Otra rejilla aplicada es un *kernel* en términos de función gaussiana

$$h_{ci}(t) = \alpha(t) e^{\frac{-\|r_c - r_i\|^2}{2\sigma^2(t)}} \quad (5.3)$$

donde  $\alpha(t)$  y  $\sigma(t)$  definen el ancho de la rejilla.

Es normal utilizar una estrategia separada en la ordenación y en la convergencia. Así durante la fase de aprendizaje habrá una evolución tanto de la función de vecindad como del factor de aprendizaje, mientras en la convergencia se mantiene la vecindad siguiendo decreciendo  $\alpha(t)$ .

5. *Volver al paso 2*: Mientras no se haya alcanzado un estado de “orden” en la malla de competición, el algoritmo regresa al nivel 2 hasta que los nodos estén adecuadamente afinados.

Aunque los principios básicos del algoritmo de Kohonen parecen simples, y la dinámica del algoritmo ha sido ampliamente observada en forma “práctica”, ésta ofrece todavía muchos interrogantes acerca del fenómeno de ordenación topológica y convergencia. Desde el punto de vista del análisis de datos, las preguntas que debería responder el algoritmo son:

- ¿ Los mapas obtenidos son únicos, en el sentido de que a partir de pesos iniciales distintos, la respuesta sea siempre la misma ?
- ¿ Los vectores de referencia tienden a representar la función de densidad del vector de entrada ?
- ¿ Cómo definir los mejores mapas, tal que éstos cumplan con el objetivo de ser fiel reflejo del espacio de entrada sobre una dimensión reducida ?

Estas cuestiones que aquí son emplazadas caen dentro de la discusión teórica de las SOM, que lleva más de una década buscando respuestas. Según Kohonen [Kohon95], hay cuatro clases de problemas en las discusiones sobre los mapas auto organizados.

1. Ordenamiento topológico de los mapas
2. Convergencia de los vectores de referencia,  $M_i$ .
3. Función de densidad,  $p(X)$ , versus vectores de referencia
4. Óptima función de vecindad,  $h_{ci}$ , y factor de aprendizaje

Las respuestas que se tienen a estas preguntas son parciales, especialmente en un sentido estrictamente matemático. Se han hecho diferentes esfuerzos con diversos métodos

y herramientas matemáticas para describir en forma general los fenómenos de orden y convergencia, pero hasta ahora no se tienen soluciones globales. Las soluciones o aproximaciones existentes se refieren a casos específicos o con condiciones limitadas.

El único análisis matemático completo que se tiene hasta ahora es para el caso unidimensional, el vector de entrada es de dimensión unitaria y la malla la componen unidades dispuestas a modo de secuencia de nodos unidimensionales. *Cottrell y Fort* [Cottr87] presentan un tratamiento completo y riguroso de las propiedades de auto organización y convergencia del SOM, cuando se cumplen los requisitos de función de densidad de entrada continua y función de vecindad tipo escalón.

### 5.1.1.3 Ordenamiento de los vectores de referencia

Un aspecto interesante consiste en averiguar, si los vectores de pesos, inicialmente aleatorios, se ordenan por medio de la regla de aprendizaje, de modo que preserven la topología del espacio de entrada. Pero ¿cómo expresar matemáticamente, que un array o malla está ordenado? ¿Qué es exactamente un orden topológico?. El concepto de orden es trivial en el caso unidimensional, definiendo una función objetivo  $J$  y asumiendo un conjunto de números escalares  $\mu_i \in \mathfrak{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , luego

$$J = \sum_{i=2}^N |\mu_i - \mu_{i-1}| - |\mu_N - \mu_1| \quad (5.4)$$

es mínimo, y en este caso cero, si y solo si los  $\mu_i$  están ordenados numéricamente en secuencias ascendentes o descendentes. Considerando un proceso de auto organización, con un vector de entrada unidimensional y los  $\mu_i$  que corresponden a los escalares de referencia,  $M_i$ , el array lineal tenderá a  $J = 0$ , a un estado absorbente en el sentido markoviano<sup>1</sup>, esta condición de orden no cambia aun cuando el proceso de aprendizaje continúe con la exposición de más entradas. *Cottrell y Fort* [Cottr87] han presentado una exhaustiva demostración del proceso de ordenamiento para el caso unidimensional. La propiedad general demostrada del ordenamiento de un mapa de Kohonen unidimensional se establece como:

“Siendo  $\xi$  una variable estocástica y habiendo empezado con pesos iniciales aleatorios para cada  $\mu_i$ , estos pesos modificados por el proceso de aprendizaje según ( 5.1 ) y ( 5.2 ), junto con una función de vecindad de  $i-1$  e  $i+1$ , tal que cuando  $t \rightarrow \infty$ , el conjunto de pesos  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$  tenderán ha ordenarse en secuencia ascendente o descendente. Una

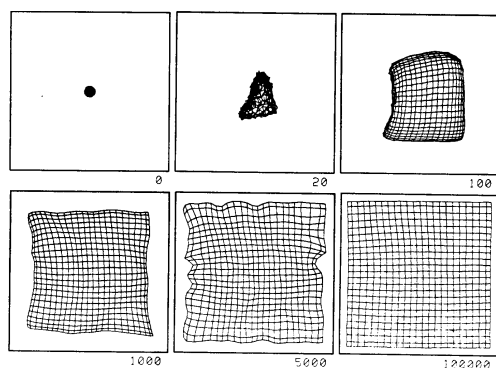
---

<sup>1</sup> Las técnicas de Markov se utilizan principalmente para el estudio de la auto organización. Se trata de aplicar los resultados conocidos de la teoría de Markov al proceso de organización topológica. Así, para la prueba de auto organización, lo que se pretende es probar la existencia de un estado absorbente, al cual en el proceso de aprendizaje de los vectores de referencia, entrarán en el estado ordenado con probabilidad uno después de un tiempo determinado.

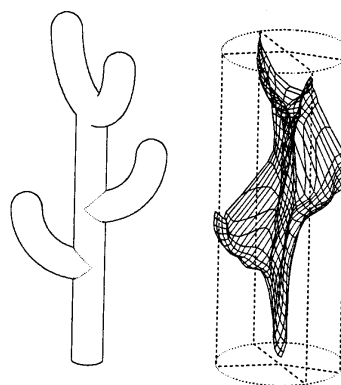
vez el conjunto ordenado, éste no podrá ser desordenado aunque existan etapas de actualización”

Para mayores dimensiones es muy difícil definir un orden topológico. Por lo menos así lo han mostrado los diversos trabajos, en lo que para cada sugerencia hecha de la función  $J$ , siempre se ha encontrado un contraejemplo que contradice la existencia de un estado absorbente.

Al menos lo que sí siempre se ha cumplido en las SOM, es que el orden refleja propiedades de la función de densidad de la variable de entrada,  $p(X)$ . Parece que debería definirse el concepto de orden, en términos de minimizar alguna condición expresada como función de error medio esperado entre la distribución de los vectores de referencia y  $p(X)$ . Efectivamente, en las pruebas constructivas y para el caso específico de igual dimensión en el espacio de entrada y en la malla, el ordenamiento está ligado al compromiso geométrico de los nodos con la variable de entrada.



**Figura 5.5 Distribución de  $p(x)$  uniforme en un rectángulos (2D)**



**Figura 5.6 Distribución de  $p(x)$  uniforme en un cactus (3D)**

#### 5.1.1.4 Convergencia de los vectores de referencia

Una vez acabada la fase de ordenación y sabiendo que cualquier actualización no variará el orden, los mapas tienden a converger, de forma óptima en el sentido, tal que éstos representen imágenes de la función de densidad de las variables de entrada. Una solución formal para la determinación de los  $M_i$  no está disponible actualmente, al menos con una proposición genérica de  $p(X)$ . Kohonen ha demostrado la validez de la fórmula del descenso del gradiente para SOM de orden topológico cero<sup>2</sup>, derivable del error de cuantización medio esperado.

<sup>2</sup> Sin vecindad, correspondiente a los métodos clásicos de *Vector Quantization* (VQ)

Los algoritmos VQ representan una clásica aplicación del método de aproximación de la función de densidad de una señal,  $p(X)$ , usando un número finito de vectores de referencia  $M_i \in \mathcal{R}^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Uno de los vectores de referencia,  $M_c$ , es elegido al estar más próximo al vector de entrada,  $X$ .

$$\|X - M_c\| = \min_i \{\|X - M_i\|\} \quad (5.5)$$

El índice  $c$  es actualizado en el proceso de aprendizaje para cada nueva entrada. Una óptima selección de  $M_i$  podría consistir en minimizar el valor cuadrático medio del error de cuantización, definido como:

$$E = \int \|X - M_c\|^2 p(X) dX \quad (5.6)$$

donde la norma es euclídea. Obsérvese que el subíndice " $c$ " es una función de la señal de entrada,  $X$ , y de todos los vectores de referencias  $M_i$ , de manera que el cálculo del error no se puede realizar de manera sencilla, al variar  $M_i$  su posición en el espacio de entrada por la propia evolución de aproximación a la función de densidad de  $X$ .

Sin demostrarlo [Zador82], la óptima posición de los  $M_i$  tal que se aproxime a la función de densidad de  $X$  es  $[p(X)]^{n/(n+2)}$ , siendo  $n$  la dimensión del espacio de entrada; en el caso de tener  $n \gg 2$ , los vectores de referencia se aproximan a la función de densidad con un número finito de vectores.

Kohonen demuestra que los *codebook vectors* siguen un proceso similar al método de aproximación estocástico de Robbins-Monro en su dinámica de acercamiento a posiciones óptimas. La idea que introducen Robbins y Monro [Robbi51] es el cálculo de  $M(t)$  (vector de pesos) en la red de Adaline de Widrow [Widro62]. Sugieren que el valor del vector de pesos se calcule en cada paso de forma iterativa. Partiendo del cálculo de la función objetivo,  $J$ , como la media esperada del error cuadrático

$$J = E\{(\eta - M^T X)^2\} \quad (5.7)$$

siendo  $\eta = M^T X + \varepsilon$  la dependencia lineal de la red y  $\varepsilon$  el error estadístico con valor esperado nulo; donde  $E\{\cdot\}$  denota la esperanza matemática sobre el conjunto infinito de muestra. Si  $p(X)$  es la función de densidad de la variable de entrada, se puede reescribir como

$$J = \int (\eta - M^T X)^2 p(X) dX \quad (5.8)$$

donde  $dX$  es un elemento diferencial de volumen en el hiperespacio  $n$ -dimensional de los valores de la señal sobre la cual se realiza la integral. El problema es encontrar el valor  $M^*$  tal que minimice  $J$ . La condición para el mínimo local es

$$\nabla_m J = \left[ \frac{\partial J}{\partial \mu_1}, \frac{\partial J}{\partial \mu_2}, \dots, \frac{\partial J}{\partial \mu_n} \right]^T = 0 \quad (5.9)$$

Ya que la función de densidad  $p(X)$  no se conoce normalmente en su forma analítica (en la mayoría de los casos se tiene únicamente una distribución de muestras experimentales de  $X$ ), se debe aproximar  $J$  usando los valores disponibles de  $X$ . Se puede establecer entonces una “función muestra” de  $J$  mediante  $J_1(t)$ :

$$J_1(t) = [\eta - M^T(t)X(t)]^2 \quad (5.10)$$

donde  $t = 0, 1, 2, \dots$  es un índice de la muestra, y  $M(t)$  es una aproximación, más o menos buena, de  $M$  en un tiempo  $t$ . La aportación fue determinar  $M(t)$  en cada paso de una recursión, donde el gradiente de  $J$  se aproxima por el gradiente de  $J_1(t)$  con respecto a  $M(t)$ . A partir de esta idea se mostró que empezando con valores arbitrarios iniciales  $M(0)$ , la secuencia  $\{M(t)\}$  converge a una vecindad del vector óptimo  $M^*$ . Esta recursión se define como una serie de pasos de gradiente

$$M^T(t+1) = M^T(t) + \alpha(t)[\eta(t) - M^T(t)X(t)]X^T(t) \quad (5.11)$$

Robbins y Monro probaron que esta secuencia converge con probabilidad uno hasta el óptimo local de  $M^*$ , para la cual  $J$  es mínimo, si y solo si, se cumplen las siguientes condiciones:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \alpha(t) = \infty, \quad \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^2(t) < \infty \quad (5.12)$$

Lo relevante de esta aproximación es que el algoritmo utilizado en las SOM de orden topológico cero es [Kohon95]:

$$M_i(t+1) = M_i(t) + \alpha(t) \delta_{ci} [X(t) - M_i(t)] \quad (5.13)$$

siendo  $\delta_{ci}$  delta Kronecker (1 para  $c = i$ , 0 en caso contrario). Esta regla es obtenida a partir de tratar de minimizar la función objetivo de valor cuadrático medio del error de cuantización, definido como

$$E = \int \|X - M_c\|^2 p(X) dX \quad (5.14)$$

donde la norma es euclídea. La comparación entre ambas ( 5.11 ) y ( 5.13 ), muestra que la condición de convergencia planteada por Robbins y Monro puede aplicarse al algoritmo de Kohonen. Así el factor de aprendizaje,  $\alpha(t)$ , debe cumplir que la secuencia decrezca a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ ; la secuencia  $\{\alpha(t) \mid t = 0, 1, \dots\}$  debe satisfacer las condiciones puestas en ( 5.12 ).

Atendiendo a las propiedades generales de la aproximación estocástica, junto con la convergencia a un estado absorbente, los valores esperados de  $M_i(t+1)$  y de  $M_i(t)$  para  $t \rightarrow \infty$  deben ser iguales, incluso cuando  $h_{ci}(t)$  fuese seleccionado distinto de cero. En otras palabras, cuando la red se encuentre en estado estacionario deberá cumplir:

$$E\{h_{ci}(X - M_i^*)\} = 0, \quad \forall i \quad (5.15)$$

En el caso más simple de  $h_{ci}(t)$ , donde fuese declarado como 1 para aquellos nodos que perteneciesen al conjunto topológico de  $N_c$  y nulo para el resto, el vector de referencia se posicionará:

$$M_i^* = \frac{\int_{V_i} X p(X) dX}{\int_{V_i} p(X) dx} \quad (5.16)$$

donde  $V_i$  es el conjunto de todos los valores de  $X$  que han actualizado al vector  $M_i$ . Estas condiciones de equilibrio significan que cada  $M_i^*$  debe coincidir con el centroide de su región de influencia, más aun, representa el centroide de  $p(X)$  sobre la parte la región que le ha tocado dominar. Éste podría ser definido como el estado ordenado. Intuitivamente deja claro que para cualquier dimensión, el equilibrio sólo podría conseguirse con una particular configuración de  $M_i$ .

### 5.1.1.5 Mosaico de Voronoi

Un concepto ampliamente utilizado tanto en los métodos VQ como en redes neuronales es el mosaico (*tessellation*) de Voronoi. La figura 5.7 muestra como los finitos vectores de referencia en  $\mathcal{R}^2$ , presentados como puntos, han dividido el espacio en regiones de influencia, limitada por bordes lineales ( en general, hiperplanos), tal que cada partición contiene un vector de referencia, siendo éste el vector dominante dentro del área. Al conjunto de líneas que rodean al vector de referencia se le llama mosaico de Voronoi. Y a todos los infinitos vectores que están dentro del entorno se dice que forman un conjunto de Voronoi.

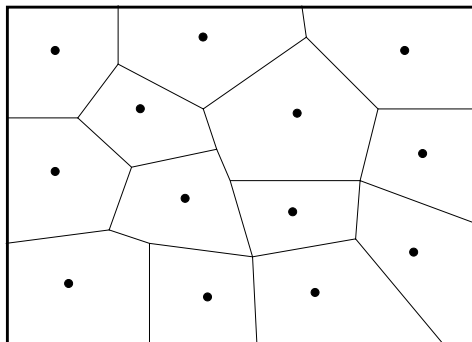


Figura 5.7 Mosaico de Voronoi

#### 5.1.1.6 Óptimo ritmo de aprendizaje

El periodo de ordenación suele ser corto, llevándose casi todo el tiempo de aprendizaje en la fase de convergencia, con el objetivo de obtener una fiel aproximación estadística de la función de densidad de la entrada. No está claro como debería optimizarse el ritmo de aprendizaje en la primera fase de ordenación, ya de por si difícil, más aun cuando también participa en la modificación de los vectores de referencia, la función de vecindad asociada a cada neurona ganadora. En cambio, durante la fase de convergencia, el hecho de mantener fijo el ancho de vecindad, hace más factible determinar algún tipo de secuencia óptima  $\{\alpha(t)\}$ .

El carácter recursivo del algoritmo ( 5.1 ) ( 5.2 ) incita a que el vector de referencia siga la traza de las muestras de entrada que caen dentro de su dominio de influencia. La Figura 5.8 y la Figura 5.9 señalan como la regla de aprendizaje asume la historia de los vectores de entrada que casan con la neurona. Y es aquí donde el ritmo de aprendizaje tiene mucho que ver con la convergencia.

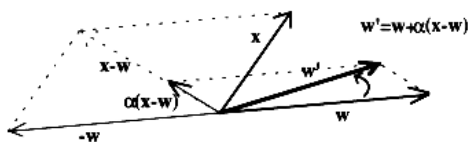


Figura 5.9 Interpretación geométrica del factor de aprendizaje

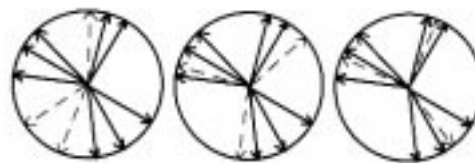


Figura 5.8 Proceso de aprendizaje en 2D  
a) Inicio b) Ordenamiento c) Convergencia

En esta etapa de convergencia, caracterizada por una función de vecindad constante, sí existen dos entradas  $X(t_1)$  y  $X(t_2)$  que casan con diferentes neuronas y con  $t_2$



$> t_1$ , pero que la aportación a sus correspondientes neuronas deberían ser las mismas, por ser presentadas en el mismo orden, aunque eso sí, separado en el tiempo, la ley de la secuencia podría estimarse de diferentes ritmos de aprendizaje para cada una de ellas. Si además deben cumplir los requisitos de aproximación estocástica del proceso, ( 5.12 ), una propuesta correspondería a :

$$\alpha_c(t+1) = \frac{\alpha_c(t)}{1 + \alpha_c(t)} \quad ( 5.17 )$$

sólo serían actualizados aquellos ritmos de aprendizaje pertenecientes a neuronas ganadoras, el resto no mantendrían cambios. Esta especulación teórica no es compartida como la mejor forma de aprendizaje en la práctica, debido a los variados valores de  $\alpha_i$  obtenidos en la ejecución del algoritmo de aprendizaje. Es una contradicción que los vectores de referencia, fieles representantes de alguna función monótona de  $p(X)$ , sean bruscamente orientados por los diferentes ritmos de aprendizaje.

Por el anterior razonamiento parece justificado mantener un  $\alpha(t)$  global en toda la malla y buscar un ritmo óptimo medio. *Mulier y Cherkassky* [Mulie92] han propuesto una expresión de la forma:

$$\alpha(t) = \frac{A}{B + t} \quad ( 5.18 )$$

donde A y B son unas constantes elegidas. Al menos esta forma satisface las condiciones de aproximación estocástica. La principal justificación es que las muestras más recientes son consideradas dentro del entorno de evolución.

#### 5.1.1.7 Efecto de la forma de la función de vecindad

Para una buena fase de ordenación es imprescindible empezar con radios de vecindad de la mitad de la red,  $N_c(0)$ , evitando la aparición de mapas configurados metaestables, recibiendo este nombre cuando la distorsión media esperada o error de cuantización cae dentro de un mínimo local y no global.

*Erwin et al.*[Erwin92] han analizado los estados metaestables en mallas de una única dimensión, definiendo que una función de vecindad es convexa dentro de un cierto intervalo  $I \equiv \{0,1,2,...N\}$ , si las condiciones  $|s-q| > |s-r|$  y que  $|s-q| > |r-q|$  implican que  $[h(s,s) + h(s,q)] < [h(s,r) + h(r,q)]$  para todo  $s,r,q \in I$ , en caso contrario la función de vecindad es cóncava.

El principal resultado que obtuvieron fue que si la función es convexa no existen estados que no estén ordenados, mientras que con el uso de funciones cóncavas aparecen estados metaestables que podrían ralentizar el proceso de ordenamiento. Por lo tanto, si en el principio del proceso se utiliza una función de vecindad convexa, el ordenamiento es

casi seguro, y posteriormente la función de vecindad puede ser contraída para mejorar la aproximación a  $p(X)$ .

#### 5.1.1.8 Factor de magnificación

Desde el punto de vista de los mapas biológicos cerebrales, existe correspondencia entre el volumen de información a representar y la densidad de células receptoras, definiéndose factor de magnificación como el número de neuronas por unidad de área. Algo similar sucede en los SOM, donde el área reservada en la representación de los patrones es proporcional a la frecuencia estadística de la ocurrencia del patrón en las observaciones.

*Ritter et al.* [Ritte88] han analizado el factor de magnificación en mapas unidimensionales con gran cantidad de vectores de referencia sobre un área finita. Si  $N$  es el número de vecinos incluidos en el conjunto de vecindad, se demuestra que la densidad de vectores de referencia es proporcional a  $p(X)^r$ , donde el exponente es

$$r = \frac{2}{3} - \frac{1}{3N^2 + 3(N+1)} \quad (5.19)$$

Obsérvese que para  $N=0$ , caso VQ, la densidad de vectores se aproxima con un valor bajo,  $r = 1/3$ , considerándolo como un handicap. En cambio, si  $N$  tiende a ser elevado  $r \rightarrow 2/3$  más próximo a la concepción hipotética de ordenación, según modelos biológicos.

Por último, si en la fase de convergencia ya no es tan importante el ancho de vecindad, especialmente si es utilizado un *kernel* gaussiano, se puede llegar al caso extremo de topología de orden cero, es decir, sólo el ganador es actualizado. Sin embargo, la falta de interacción con los vecinos, en esta fase de aprendizaje, puede llevar a situaciones de pérdida del estado de ordenamiento. Concluyendo, debe existir un compromiso entre la mejor aproximación a la función de densidad  $p(X)$ , cuyo mejor caso es el VQ, y la estabilidad del ordenamiento, para lo que se hace necesario mantener las interacciones con los vecinos.

### 5.1.2 Conclusiones sobre los mapas auto organizados

Las conclusiones que se pueden extraer del estudio anterior, para enfrentarse posteriormente a la utilidad de las SOM como parte del análisis de datos, están reflejadas en los siguientes puntos:

Primero, desde el punto de vista del ordenamiento, cabe decir que se ha demostrado la existencia de un estado absorbente y ordenado para el caso unidimensional, y que para dimensiones mayores se sospecha que el orden topológico está íntimamente ligado con la función de densidad de la variable de entrada. Estos supuestos son ratificados por las pruebas constructivas.

Segundo, una vez ordenado topológicamente la malla, ésta no sufre alteraciones de orden aunque existan nuevas actualizaciones, siempre y cuando se mantenga un cierto nivel de interacciones laterales.

Tercero, la fase de convergencia hace tender los vectores de referencia hacia los centroides de las regiones de influencia o entornos de Voronoi, que les correspondan dominar.

Cuarto, la plausibilidad de aproximación estocástica del proceso impone restricciones al factor de aprendizaje, como una secuencia monótona decreciente.

Quinto, la función de vecindad debe inicializarse con radios de vecindad mitad el tamaño de la malla, evolucionando en el tiempo de forma decreciente hasta mantenerse constante en la fase de convergencia. Las funciones de vecindad deben ser convexas para evitar configuraciones metaestables.

Sexto, el orden topológico también se relaciona con la densidad de vectores, en aquellas áreas de mayor cantidad de información a representar, mayor densidad de vectores de referencia se necesitan.

Séptimo, los mapas SOM deben ser un compromiso entre el ordenamiento topológico, que depende mucho de las interacciones laterales entre vecinos, y la aproximación estadística a  $p(X)$ , cuyo óptimo se encuentra en las configuraciones VQ.

Las SOM no sólo tienden a reflejar la función de densidad de la variable de entrada, sino que además muestran características de ordenamiento topológico, siendo este concepto recogido de imitación a mecanismos orgánicos, en el sentido de considerar a los cerebros ordenados. Llegando a decir, que los SOM permiten conocer la naturaleza de la información mediante la aproximación a la función de densidad, pero además aporta, que aquellas regiones de  $\mathcal{R}^n$  más excitadas le corresponderán más neuronas, extrayendo los polos de atracción y homogeneidad de los grupos inherentes existentes.

## 5.2 SOM como herramienta de *clustering*

---

Si bien es conocido el éxito de la clasificación de los mapas auto organizados, éstos podrían ser mejorados si el diseñador introdujera conocimiento a priori del problema, siendo ésta la única manera conocida, hasta el momento, para producir mejores clasificadores. La forma de actuar consiste en aumentar la discriminación mediante alguna transformación en los datos. Este tipo de actuación sólo se puede hacer desde una interpretación inteligente, por lo que queda la intervención del raciocinio humano para que busque la óptima proyección de la información.

Un buen inicio en la construcción del clasificador, es la obtención de un mapa auto organizado sobre la información a catalogar. Y este pensamiento se sustenta en las inmejorables características que otorgan las SOM. Las principales ventajas que afirman la anterior sentencia vienen avaladas en:

1. El mapa refleja la función de densidad de la variable de entrada, lo que permitirá sugerir funciones de densidad condicionada de los grupos inherentes existentes.
2. Los patrones similares corresponden a neuronas vecinas, y éstas al proyectarse sobre una dimensión reducida ayudarán a conocer los *cluster* existentes.
3. Al ser aprendizaje no supervisado se hace una exploración de los datos, conociendo la estructura inherente de éstos.
4. Divide el espacio de entrada en diferentes regiones de interés, elemento esencial en la introducción de conocimiento a priori. En general, no existe una única transformación global que ayude a aumentar el poder de discriminación, sino de alguna transformación local, lineal o no, que mejore la discriminación. Derivando el problema en la configuración de diferentes clasificadores para cada región.

Los siguientes párrafos tienen como objetivo cómo decantar a partir de la información de los mapas de Kohonen los *clusters* que contiene el espacio de medidas.

### 5.2.1 Deficiencias de los mapas de Kohonen en el proceso de *clustering*

Tal como se ha comentado, una de las propiedades de los mapas de Kohonen es mantener fielmente reflejado el vector de entrada en una dimensión reducida (p.ej  $\mathbb{R}^n \gg 2$ ). Esta virtud es aplicada para el análisis de los datos, de manera que los grupos inherentes en los datos de entrada corresponderían con neuronas próximas entre sí y delimitarían una región determinada. Así, a cualquier grupo en  $\mathbb{R}^n$  debería corresponderle una región de menor dimensión sobre el mapa. Con el objetivo de mostrar las deficiencias de los mapas de Kohonen en *clustering*, es repetido brevemente el experimento realizado por *Ullsch et al* [Ullsch90].

Se eligen 4 puntos en tres dimensiones (ABCD), correspondientes al vértice de un tetraedro (Figura 5.10). Para cada uno de los puntos se toman vectores aleatorios, con una distancia comprendida entre 0.1 y 0.4 tomando un valor medio de 0.2 respecto a cada uno de los vértices, generándose una nube de puntos por cada punta de la figura geométrica. Todos los vectores están escalados, de manera que la globalidad de los datos estén inscritos en un cubo unidad (Figura 5.11).

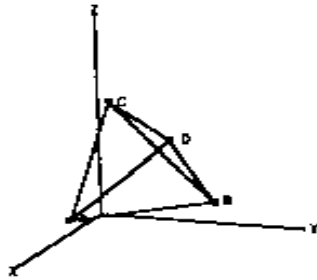


Figura 5.10 Vértices del tetraedro

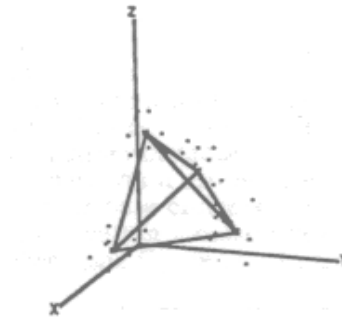


Figura 5.11 Puntos sobre los vértices

Los algoritmos de *clustering* deberían separar el conjunto de datos en cuatro subconjuntos e indicar la disimilaridad de éstos. Para verificar el mapa de Kohonen se hace uso de una red de 64 neuronas y con un entrenamiento de 40 vectores. Las Figura 5.11y Figura 5.12 muestran la distribución inicial de los vectores de referencia y como después de 50.000 pasos de entrenamiento aparecen nítidamente los cuatro cluster.

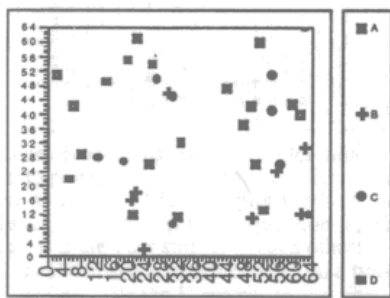


Figura 5.13 Vectores iniciales

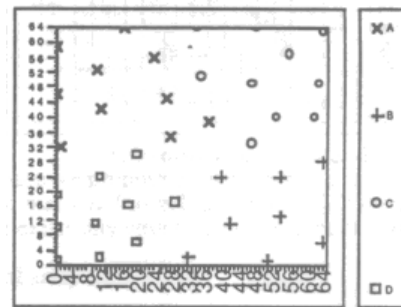


Figura 5.12 Vectores después de 50000 pasos

El comportamiento de los mapas auto organizados muestra que quedan reflejadas las funciones de densidad del vector de entrada sobre ellos. No obstante, las distancias entre los datos también aparecen distribuidas. Las posiciones fronteras entre grupos dentro de la red no reflejan las separaciones euclídeas de los datos. Otros experimentos realizados con funciones de vecindad distintas (hexagonales y octogonales) fueron probados con iguales comportamientos.

### 5.2.2 Método U-Matriz

Utlsh y Siemon proponen utilizar un método complementario al algoritmo del SOM, que es el cálculo de la matriz llamada U-Matriz; permitiendo obtener un mapa superpuesto al SOM que remarque más la distribución del vector.

Para cada unidad  $a_{ij}$  del mapa auto organizado se definen cuatro tipos de distancia a sus inmediatos vecinos.

$$\begin{aligned}
 d_x(i, j) &= d(u_{i,j}, u_{i+1,j}) \\
 d_y(i, j) &= d(u_{i,j}, u_{i,j+1}) \\
 d_{xy}(i, j) &= d(u_{i,j}, u_{i+1,j+1}) \\
 d_{yx}(i, j) &= d(u_{i,j+1}, u_{i+1,j})
 \end{aligned}
 \quad (5.20)$$

Y se propone la siguiente matriz que combina las cuatro distancias con una dimensión de  $\Re^{2n-1 \times 2n-1}$  como sigue:

**Tabla 5.1 Matriz de distancia**

U-Matriz	...	2j-1	2j	2j+1	...
2i-1		$d_z(i,j-1)$	$d_y(i-1,j)$	$d_z(i-1,j)$	
2i		$d_x(i,j-1)$	$d_u(i,j)$	$d_x(i,j)$	
2i+1		$d_z(i,j-1)$	$d_y(i,j)$	$d_z(i,j)$	

donde  $d_z(i,j)$  es el valor medio de  $d_{xy}(i,j)$  y  $d_{yx}(i,j)$  y  $d_u$  puede ser elegida arbitrariamente. Este valor puede ser, por ejemplo, la distancia de esta entrada a la unidad  $a_{ij}$ . Por cada unidad  $a_{ij}$  hay un correspondiente elemento  $d_u(ij)$  conteniendo la distancia  $d_y$ ,  $d_x$  y la distancia diagonal con sus vecinos. La distancia diagonal es representada en la U-Matriz como medias aritméticas de  $d_{xy}$  y  $d_{yx}$ . La U-Matriz contiene por tanto una correcta aproximación de la distribución del vector en el mapa de Kohonen. Para obtener una presentación de las características de U-Matriz se visualizará de forma tridimensional, mostrando la altura el nivel de separación de las neuronas. Así neuronas próximas entre sí corresponderán con una presentación cartográfica de “valles” que indicarán proximidad de los pesos en  $\Re^n$  y las “colinas” o “muros” muestran vectores de referencia próximos entre sí en el mapa auto organizado pero distantes en  $\Re^n$ .

Las Figura 5.14 y Figura 5.15 reflejan la disposición de la U-Matriz en el caso de los datos del tetraedro y un hexaedro; obsérvese que el mapa es dividido en cuatro o seis regiones diferentes, correspondiente a los cuatro o seis *clusters*.

Por tanto, para explorar las características intrínsecas en datos n-dimensionales se propone utilizar U-Matriz, con el siguiente método:

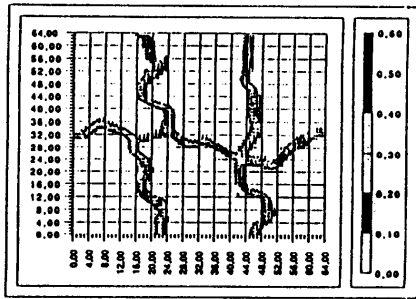


Figura 5.14 Cluster del hexaedro

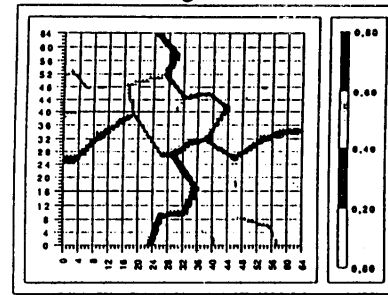


Figura 5.15 Cluster del tetraedro

1. Construir el mapa auto organizado de dos dimensiones
2. Calcular la U-Matriz como se ha comentado anteriormente.
3. Interpretar la matriz como sigue: Puntos en  $\mathcal{R}^n$  próximos entre sí que formen un grupo, mantendrán posiciones valles en la presentación de la SOM con el relieve otorgado por la matriz. En caso de disimilaridad los vectores se situaran en zona de “colinas”, mostrando de esta forma la falta de consistencia en la formación de un grupo homogéneo.

### 5.3 Refinamiento de la técnica de clustering

El refinamiento de *clusters* puede ser conseguido si además se desea parametrizar el espacio. El objetivo de modelar el espacio es un paso previo para diseñar clasificadores paramétricos, es decir, la capa de clasificación puede ser utilizada como realimentación a la fase de análisis de los datos. Al introducir la condición de normalidad en el tipo de distribución de los clusters, ésta podría fijar definitivamente la separación/agrupación de los datos, y por lo tanto, también será posible diseñar clasificadores paramétricos. La técnica que sustenta este proceder, va a ser expuesta en las próximas secciones y capítulos; sus soportes están en el test de normalidad, las transformaciones Box-Cox y la distancia de Bhattacharyya.

Ya ha habido varios estudios que han puesto sus esfuerzos en el uso de los mapas auto organizados de Kohonen [Martí95][Varfi92], como técnica de análisis de los datos. En los apartados anteriores se expuso que, los mapas auto organizados tienden a un supuesto orden topológico, tal que combinan la interacción de las neuronas vecinas con la aproximación a reflejar la función de densidad de la variable de entrada. Las proyecciones de  $\mathcal{R}^n$  sobre una menor dimensión (p.ej.  $\mathcal{R}^2$ ) permiten fácilmente definir las posibles

regiones existentes entre los datos, así a cualquier grupo en  $\mathfrak{R}^n$  le corresponde una región sobre el mapa. No obstante, el uso de los mapas de Kohonen como técnica de análisis es incompleta, al desaparecer la distancia euclídea entre los datos.

Ultsh et al [Ultsh90] proponen utilizar un método complementario al algoritmo del SOM, que es el cálculo de la llamada U-Matriz. Éste permite obtener un mapa superpuesto al SOM que remarque más la distancia en el espacio de medidas. No obstante, en las observaciones experimentales, los resultados no fueron los esperados, al no encontrar de forma nítida y clara las fronteras entre *cluster*.

En los párrafos anteriores, han sido comentadas las características de los mapas de Kohonen, y al hablar sobre la convergencia, se exponía la idea de que los vectores de referencia se encaminan a representar la función de densidad de la variable de entrada,  $p(X)$ . Llegándose a indicar por Kohonen, que los vectores de referencia tienden a ser los centroides de los conjuntos de Voronoi, esgrimiéndose la expresión:

$$M_i = \frac{\int_{U_i} X p(X) dX}{\int_{U_i} p(X) dX} \quad ( 5.21 )$$

Si en esta expresión se expresa  $p(X)$ , en relación con las probabilidades condicionadas de los grupos dentro del conjunto de Voronoi,  $U_i$ , de la neurona  $i$ :

$$p(X) = \sum_{j=1}^{h_j} p(X|\omega_j) p(\omega_j) \quad ( 5.22 )$$

teniendo a  $h_j$  como el número de grupos existente en  $U_i$ . La expresión resultante será:

$$M_i \int_{U_i} p(X) dX = \int_{U_i} X \sum_{j=1}^{h_j} p(X|\omega_j) p(\omega_j) dX \quad ( 5.23 )$$

desprendiéndose el significado de  $M_i$ , como elemento representativo del dominio que le corresponde, en otras palabras, la mejor aproximación de  $p(X)$  en esta limitada región. Luego es posible buscar cual es la función de densidad condicionada que refleje a  $p(X)$ . Si se hace minimizar la expresión siguiente:

$$\min_{U_i} \left( \int_{U_i} (M_i - X) \sum_{j=1}^{m_i} p(X|\omega_j) p(\omega_j) dX \right) \quad ( 5.24 )$$



el planteamiento supone tener un conocimiento del número de clases distintas que caen dentro del entorno  $U_i$ , y del tipo de función a utilizar con sus correspondientes parámetros. En definitiva, la problemática se cierne sobre el número de *clusters* que tiene el clasificador y la naturaleza de las funciones de densidad. Según lo apuntado hasta ahora, si se hace aproximar  $p(X)$  en cada conjunto de Voronoi, el número de *clusters* queda definido, tantos grupos como neuronas contenga el mapa. En cuanto a las funciones condicionadas, hay que observar, cómo las neuronas erróneas, es decir aquellas activadas con muestras de dos o más grupos, son sus conjuntos  $U_i$  remansos de funciones de densidad. Este motivo sugiere utilizar una técnica de sólo etiquetar aquellas neuronas que, sean ganadoras de un único tipo de patrón. Si se acepta tal precepto la expresión quedará como:

$$\min(\int_{U_i} (M_i - X)p(X|\omega_j)dX) \quad (5.25)$$

siendo  $\omega_j$  la única clase que cae dentro de  $U_i$ . Por último, quedará conocer cual es la parametrización óptima a considerar y en función de ésta el número de parámetros a determinar, quedando reflejado en:

$$\min(\int_{U_i} (M_i - X)p(X|\theta_{\omega_{j1}}, \theta_{\omega_{j2}}, \dots, \theta_{\omega_{jr}})dX) \quad (5.26)$$

el método presentado lleva grandes dificultades prácticas, algunas de tipo técnico, como es la integral extendida en el dominio  $U_i$  y otras en cuanto que las conclusiones extraídas de exclusión de otras clases ( $p(\omega_k)$  sean nulas para toda  $k$  distinto de  $j$ ), es en la mayoría de las veces, inferidas a partir de un número de muestras insuficientes.

La observación empírica de los mapas, muestra como los patrones similares tienden a estar próximos entre sí, características propias del SOM. De lo que se desprende que podrían unirse en la formación de un *cluster*, ¿pero cómo se podría decidir la unión?. En principio, por aquellas neuronas que tengan la misma etiqueta, sean vecinas, y que además sugieran alguna función de distribución conocida. Luego se podría expresar el objetivo de determinación del *cluster* y parametrización como:

$$\min(\sum_{i=1}^H \int_{U_i} (M_i - X)p(X|\theta_{\omega_{j1}}, \theta_{\omega_{j2}}, \dots, \theta_{\omega_{jm}})dX) \quad (5.27)$$

donde  $H$  es el numero de entornos unidos en la formación del *cluster*. Ésta es la expresión genérica de construcción de un *cluster* parametrizado. Sin embargo, tiene las dificultades de no ser conocido el número de neuronas que integrarán el *cluster*,  $H$ , ni se conoce que tipo de función de densidad siguen. Por lo que se plantea un proceso iterativo de localización del *cluster* mediante la siguiente técnica: primero, etiquetar únicamente las neuronas bajo las hipótesis de trabajo marcadas, a decir, aquellas que se activen mediante un único tipo de patrón, a diferencia del método de votación usado por Kohonen. Segundo, iniciar un diseño de los *clusters* basados en las U-Matriz y en el aspecto descriptivo de los

patrones, y tercero, se pasará al refinamiento de los *cluster* mediante la aproximación a alguna función de densidad conocida, proponiéndose la normalidad en cada *cluster* por las razones que se van a ver a renglón seguido.

Paso previo a la normalidad es la desaparición de las componentes discretas en la nueva fase. La actuación viene avalada por motivos diversos. Primero, al introducir estas variables en el test de normalidad, no pasarán la prueba al mantener el mismo valor dentro del *cluster*. Segundo, el modelaje del espacio se va a realizar sobre variables continuas. En un primer paso de la tesis, la información de las componentes discretas no va a ser considerada en esta nueva fase de diseño, en la hipótesis de que es posible construir clasificadores paramétricos con variables continuas que cumplan con los requisitos de error mínimo deseado. No obstante, existe la posibilidad de que en un grado más de introducción de conocimiento a priori, se diseñen clasificadores híbridos de variables continuas y discretas. Si esta posibilidad no es introducida en este momento, es porque como tal implica una acción de razonamiento humano y por ende no hay posibilidad de implementación como algoritmo de computador.

En este proceder hay también implícita una selección de las características. Ya que la eliminación de componentes implicará la búsqueda de un subespacio del *cluster* que siga una determinada ley de distribución. A continuación se presenta el refinamiento del *cluster* mediante la búsqueda de subespacios normales.

### 5.3.1 Distribuciones multinormales

Se considera una de la más importante de las distribuciones multivariantes. Es una generalización n-dimensional de la normal univariante. En general, se asimilan a esta distribución conjuntos de variables tales como baterías de tests psicológicos, medidas biométricas, variables socioeconómicas, etc. En Reconocimiento de Formas, es una de las distribuciones más utilizadas. Las causas son múltiples, algunas razones a destacar son, la aplicación del teorema de valor central, tal como se vio en la detección de defectos, la facilidad del diseño de clasificadores, la aplicación de la distancia de Bhattacharyya como límite superior del error de Bayes, las sencillas expresiones del sesgo y la varianza para distribuciones normales, etc.

Se dice que las variables aleatorias  $x_1, \dots, x_n$  siguen una distribución normal, si existen n variables independientes  $y_1, \dots, y_n$ , con distribución  $N(0,1)$ , verificándose :

$$x_i = m_i + a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n \quad i = 1, \dots, n \quad ( 5.28 )$$

donde  $m_1, \dots, m_n$  son constantes y  $A = (a_{ij})$  es una matriz n x n no singular. Indicando  $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$  y  $M = (m_1, \dots, m_n)^T$ , ( 5.28 ) se expresa también en la forma :

$$X = AY + M \quad ( 5.29 )$$

Se designará la distribución normal multivariante por  $N(M, \Sigma)$ . Es una distribución que depende solamente de los  $n$  parámetros de  $M$  y de los  $n(n+1)/2$  de la matriz de covarianza  $\Sigma$ .

### 5.3.1.1 Propiedades de la normal multivariante

1.  $M$  es el vector de medias y  $\Sigma$  es la matriz de covarianzas. En efecto, al ser  $E\{y_i\} = 0$  se deduce  $E\{x_i\} = m_i$ ; además, como  $E\{y_i y_j\} = 0$ ,  $E\{y_i^2\} = 1$ , se tiene que :

$$\begin{aligned} c_{i,j} = E\{(x_i - m_i)(x_j - m_j)\} &= E\left\{\left(\sum_h a_{ih} y_h\right)\left(\sum_k a_{jk} y_k\right)\right\} = \\ E\left\{\sum_{h,k} a_{ih} a_{jk} y_h y_k\right\} &= \sum_{h=1}^n a_{ih} a_{jh} \end{aligned} \quad ( 5.30 )$$

relación que equivale al producto matricial

$$\Sigma = AA^T \quad ( 5.31 )$$

La función de densidad conjunta de  $x_1, \dots, x_n$  es

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (X - M)^T \Sigma^{-1} (X - M)\right] \quad ( 5.32 )$$

siendo  $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ . Indicando también  $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$ , como las variables independientes  $y_1, \dots, y_n$ , su función de densidad conjunta es:

$$f(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} Y^T Y\right) \quad ( 5.33 )$$

la transformación que pasa de  $Y$  a  $X$  es lineal, viéndose que el jacobiano de la transformación inversa es  $J=A^{-1}$ , cuyo determinante es  $|J| = |\Sigma^{-1}|^{1/2}$ . Entonces

$$Y^T Y = (A^{-1}(X - M))^T (A^{-1}(X - M)) = (X - M)^T \Sigma^{-1} (X - M) \quad ( 5.34 )$$

- 2) La distribución de toda variable marginal  $x_i$  es normal univariante
- 3) La distribución marginal también es normal univariante
- 4) Si  $X$  es  $N(M, \Sigma)$  y  $B$  es una matriz  $p \times n$  y  $V$  es un vector  $1 \times n$ , entonces  $Z = BX + V$  es normal  $N(BM + V, B\Sigma B^T)$

Al aplicar la transformación a  $X = AY + M$ , quedará  $Z = BM + V + BAY$ , siendo la matriz de covarianzas  $\Sigma_Z = BAA^T B^T = B\Sigma B^T$

- 5) Cualquier subconjunto formado por  $m$  variables ( $m < n$ ) de  $X$  sigue también la distribución normal multivariante.
- 6) Incorrelación implica independencia estadística, es decir, si  $\Sigma$  es una matriz diagonal, las variables  $x_1, \dots, x_n$  son estadísticamente independientes. En efecto, sustituyendo  $\Sigma$  en ( 5.32 ), se obtiene que la densidad conjunta es igual al producto de las marginales
- 7) Si las variables  $x_1, \dots, x_n$  son  $N(M, \sigma^2 I_n)$ , y por lo tanto independientes, y  $Z = TX$  es una transformación lineal definida por una matriz ortogonal, entonces las variables  $z_1, \dots, z_n$  son también independientes. Al utilizar la propiedad 5), la nueva matriz  $\Sigma_Z = T \sigma^2 I_n T^T = \sigma^2 I_n$
- 8) Si  $X$  es  $N(M, \Sigma)$  entonces la distancia de Mahalanobis,  $(X-M)^T \Sigma^{-1}(X-M)$ , sigue una  $\chi_n^2$ . Al realizar una transformación  $Z = \Sigma^{-1/2}(X-M)$ , por la propiedad 5),  $Z$  es  $N(0, I)$ , luego

$$Z^T Z = z_1^2 + \dots + z_n^2 \quad ( 5.35 )$$

es la distribución de la suma de cuadrados de  $n$  variables  $N(0,1)$  independientes, es decir, definición de una  $\chi_n^2$ .

Para la distribución normal multivariante, la independencia estadística queda caracterizada por la incorrelación y la regresión es siempre de tipo lineal. En consecuencia esta distribución se adapta muy bien a determinados métodos de Análisis multivariante, que expresan relaciones de dependencia según modelos lineales.

La normalidad univariante de cada una de las variables  $x_i$ , no es condición suficiente de normalidad multivariante. Se pueden construir diferentes familias de distribución multivariante no normales, cuyas marginales sin embargo lo sean. Existen diferentes pruebas para comprobar si una muestra aleatoria simple, de tamaño  $N$ , se ajusta a una distribución normal multivariante. Se pueden citar métodos basados en la comparación de la distancia de Mahalanobis respecto a una  $\chi^2$  de carácter gráfico, distribuciones  $\Gamma$ , test de Box Cox, o normalidad de marginales. No obstante, de los

métodos mencionados, se ha utilizado la verificación de normalidad proyectando las muestras en componentes principales, por ser un test fácilmente implementable en algoritmo de computador.

Por lo que procede estudiar la posibilidad de parametrizar las funciones de densidad de los *clusters* mediante funciones normales. Con este objetivo se va a desarrollar una metodología de búsqueda de la normalidad mediante el test oportuno o en caso de no cumplir el criterio, buscar la transformación adecuada para convertir la población en normal.

### 5.3.1.2 Test de normalidad

El test de multinormalidad consistiría en comprobar la normalidad de cada variable  $x_i$ , aplicando algún test existente ( rectas de Henry, pruebas  $\chi^2$ , test de Kolmogorov, etc. ). Sin embargo, esta condición es necesaria pero no suficiente. Aunque, en el caso de tener una sola de las variables que se desvía de la normalidad, implicará la falta de validez de la hipótesis de partida. Ésta herramienta será posteriormente utilizada para la exploración de los posibles espacios normales.

Si se efectúa la proyección de la población sobre componentes principales, y seguidamente se aplica un análisis de normalidad a cada una de ellas, la prueba de multinormalidad cumple con el requisito de ser necesaria y también suficiente. En efecto, la distribución de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  es normal multivariante si y solo si es normal univariante la distribución de cada una de las  $n$  componentes. Es una consecuencia de la propia definición de normal multivariante.

Además, es aconsejable también aplicar las desigualdades de Bonferroni[Cox78], esto es, si  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , representan las afirmaciones hipotéticas de " $F_1$  es normal", " $F_2$  es normal", etc, siendo  $F_1, F_2, \dots$  las componentes principales, entonces se verifica que:

$$P(H_1 \cap \dots \cap H_n) \geq 1 - \sum_{i=1}^n P(\overline{H_i}) \quad ( 5.36 )$$

siendo  $P(\overline{H_i})$  la probabilidad de que la afirmación " $F_i$  es normal" sea rechazada cuando es cierta, y  $P(H_1 \cap \dots \cap H_n)$  es la probabilidad de que las  $n$  afirmaciones de normalidad sobre las componentes sean aceptadas cuando son ciertas, y exista por tanto, normalidad multivariante. Suponiendo que el nivel de significación para el test de normalidad sobre cada componente sea  $\varepsilon/n$ , es decir,  $P(\overline{H_i}) = \varepsilon/n$  (probabilidad de equivocarse al rechazar  $F_i$  como normal); la probabilidad de acertar al afirmar que la distribución es normal multivariante será:

$$P(H_1 \cap \dots \cap H_n) \geq 1 - n \frac{\varepsilon}{n} \quad ( 5.37 )$$

y el nivel de significación de esta prueba conjunta será inferior a  $\varepsilon$ . Por ejemplo, si se desea comprobar la normalidad multivariante con un nivel de significación de 0.05 y el espacio es de dimensión 5, se verificará la normalidad de cada componente (prueba de  $\chi^2$ , tests de Kolmogorov o Shapiro, etc.) con un nivel de significación de 0.01.

No existe un contraste óptimo para probar la hipótesis de normalidad. La razón es que la eficacia de la prueba depende del tamaño muestral, y de la verdadera distribución de los datos. Desde un punto de vista poco riguroso, el contraste de Shapiro y Wilks es, en términos generales, el más conveniente en muestras pequeñas ( $N < 30$  muestras), mientras los contrastes  $\chi^2$  de Pearson y de Kolmogorov-Smirnov, son más adecuados para muestras grandes.

Para el caso de patrones de defectos en planchas de aluminio, ha sido utilizado como método de contraste de normalidad el de Shapiro y Wilks. El motivo es el número de muestras en los *clusters* que era bajo, entre seis y la treintena de ejemplos.

Este contraste mide el ajuste de la muestra al dibujarla en papel probabilístico normal a una recta. Se rechaza la normalidad cuando el ajuste es bajo, que corresponde a valores pequeños del estadístico.

La justificación del contraste se basa que cuando la muestra está ordenada

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(N)} \quad ( 5.38 )$$

en la hipótesis de que estos valores provienen de una distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , los valores estandarizados

$$\frac{x_{(1)} - \mu}{\sigma} \leq \frac{x_{(2)} - \mu}{\sigma} \leq \dots \leq \frac{x_{(N)} - \mu}{\sigma} \quad ( 5.39 )$$

serán una muestra ordenada de una población  $N(0, 1)$ , cuyos valores están tabulados. Sea  $C_{i,N}$  el valor esperado del término que ocupa el lugar  $i$  en una muestra de tamaño  $N$  de una población normal, es decir :

$$E \left[ \frac{x_{(i)} - \mu}{\sigma} \right] = C_{i,N} \quad ( 5.40 )$$

entonces :

$$E[x_{(i)}] = \mu + \sigma C_{i,N} \quad (5.41)$$

Por tanto, el gráfico de  $x_{(i)}$  respecto a  $C_{i,N}$  será, aproximadamente una recta cuya ordenada en el origen estimará  $\mu$  y con pendiente  $\sigma$ . La expresión de los coeficientes de  $C_{i,N}$  es complicada, pero puede aproximarse por :

$$C_{i,N} = \Theta^{-1} \left( \frac{i - 3/8}{N + 1/4} \right) \quad (5.42)$$

La construcción del test de normalidad consiste en medir el ajuste de los puntos a una recta por el cuadrado del coeficiente de correlación lineal:

$$r^2 = \frac{\left( \sum_{i=1}^N x_{(i)} C_{i,N} \right)^2}{N \hat{\sigma}^2 \left( \sum_{i=1}^N C_{i,N}^2 \right)} \quad (5.43)$$

Al tener los coeficientes simetría, el test resultante puede escribirse en la forma:

$$w = \frac{1}{N \hat{\sigma}^2} \left[ \sum_{j=1}^h a_{j,N} (x_{(N-j+1)} - x_{(j)}) \right]^2 = \frac{A^2}{N \hat{\sigma}^2} \quad (5.44)$$

donde  $\hat{\sigma}^2$  es la varianza muestral,  $h$  es  $N/2$  si  $N$  es par y  $(N-1)/2$  si es impar y los coeficientes  $a_{j,N}$  se obtienen con:

$$a_{j,N} = \frac{|C_{j,N}|}{\sum_{j=1}^N C_{j,N}} \quad (5.45)$$

Shapiro y Wilks han tabulado los valores exactos de  $a_{j,N}$  sin utilizar la aproximación de (5.42). Las pruebas experimentales fueron realizadas mediante la inserción de dichas tablas.

### 5.3.1.3 Árbol de búsqueda de espacios normales

Considerando las propiedades de normalidad de las poblaciones, se pasó a la búsqueda de esta propiedad. El refinamiento de *clustering* viene dado al imponer la condición de distribución normal. Una vez eliminadas las variables discretas se pasa a


localizar los subespacios normales. El método de actuación consiste en la generación de un árbol de búsqueda de los posible espacios normales en cada *cluster*.

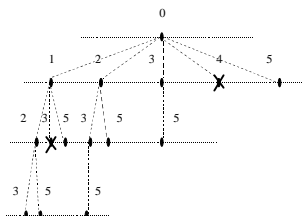
Aunque la búsqueda de espacios normales pudiera parecer explosiva, por ser  $\binom{n}{m}$  combinaciones con  $m = 1, \dots, n$ , al aplicar la condición necesaria, de que cualquier subconjunto debe ser también normal, limitará las posibilidades de exploración. Para el examen de los posibles espacios, se va a generar un árbol que indique los espacios normales.

La construcción del árbol se hace atendiendo a los siguientes criterios:

1. Del nodo raíz colgarán todas las componentes que cumplan normalidad, enumerándose de izquierda a derecha, de 1 hasta  $m_1$ . La notación  $m_i$  indica el número máximo de nodos en la capa  $i$ .
2. Los nodos que no pasen el test de normalidad no tendrán descendencia. El subespacio estará formado por las componentes que van desde la raíz hasta el nodo antes de no tener descendencia.
3. Los descendientes de cada nodo estarán constituidos por componentes situadas a la derecha según enumeración. Por ejemplo, si el nodo corresponde a la componente etiquetada 3 y hay 6 componentes, tendrá como descendientes, 4, 5 y 6.
4. La máxima profundidad del árbol indicará la mayor dimensión del subespacio normal del *cluster*

Para la implementación del árbol se ha utilizado el siguiente algoritmo:

- I. Inicialización :
- A. Construcción de un vector guía formado por las características del espacio,  $V$
  - B. Inicializar  $V = [0]$ , luego dimensión 1,  $\dim(V) = 1$ .
  - C. Definir la dimensión máxima del espacio,  $n$
- II. Mientras  $\dim(V)$  sea distinta de cero
- A. Incrementar en uno  $V(1)$
  - B. Test de normalidad en las dos poblaciones,  $\alpha$
  - C. Si  $\min(\alpha_1, \alpha_2) > \alpha_c$  hacer II.D en caso contrario saltar a II.E
  - D. Aumentar la dimensión del vector  $V$  con dicha componente  $V(1)$ ,  
 $V = [V(1) \ V]$
  - E. Si la dimensión de  $V$  es igual a  $n$ , eliminar la primera componente de  $V$
  - F. Saltar a II
- 



**Figura 5.16**    **Árbol de búsqueda**

El procedimiento genera un árbol de los posibles espacios normales. La figura 5.16 muestra un gráfico de como queda la exploración con una dimensión  $n = 5$ , las aspas indican que no ha pasado el test de normalidad. Los posibles recorridos del árbol desde la raíz hasta cada nivel, determinarán las posibles soluciones del espacio. Una buena medida para ahorrar tiempo computacional



es ordenar las características de menor a mayor índice de normalidad, llamando 1 a la característica de menor normalidad y n la de mayor índice marginal de normalidad.

Otra posibilidad sería realizar transformaciones no lineales capaces de buscar subespacios normales, con tal motivo se pasa a su estudio.

### 5.3.2 Transformaciones normalizantes

Se sabe que sólo una transformación lineal de las variables  $X$  con distribución normal multivariante da lugar a otra distribución del mismo tipo. Sea entonces una familia de transformaciones

$$X = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow X^{(\Lambda)} = (x_1^{(\lambda_1)}, \dots, x_n^{(\lambda_n)}) \quad (5.46)$$

y supóngase que para alguna transformación particular  $\Lambda_0$  las variables transformadas siguen la distribución normal multivariante. Luego  $X$  es normal multivariante si y sólo si  $\Lambda_0$  es lineal. Pudiendo construir una prueba de normalidad planteando el contraste

$$H_0 \quad \Lambda = \Lambda_0 \text{ (lineal)}$$

Rechazar  $H_0$  quiere decir que existe una transformación  $\Lambda$  no lineal tal que  $X^{(\Lambda)}$  es normal multivariante y por tanto significa rechazar la normalidad de  $X$ .

Si  $X$  es un vector aleatorio que no sigue una distribución normal, existe una potente familia de transformaciones no lineales estudiada por Andrews *et al* [Andre71], capaz de normalizar los datos observados, siendo una generalización de las transformaciones univariantes Box Cox [Box64]. Cada transformación viene definida por el vector de parámetros,  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ , de la siguiente forma

$$x_{jk}^{(\lambda_k)} = \begin{cases} \frac{(x_{jk} + m)^{\lambda_k} - 1}{\lambda_k} & \text{para } \lambda_k \neq 0 \\ \ln(x_{jk} + m) & \text{para } \lambda_k = 0 \end{cases} \quad (5.47)$$

con  $j = 1, \dots, N$  y  $k = 1, \dots, n$ , siendo  $N$  el número de muestras,  $n$  la dimensión del espacio y  $m$  se elige de forma que para cualquier  $x + m$  sea siempre positivo. Por lo tanto,  $m$  será cero si se trabaja con datos positivos e igual en valor absoluto al valor más negativo observado. Suponiendo  $m=0$  y en el caso unidimensional, es fácil ver que el logaritmo es la transformación límite cuando  $\lambda$  tiende a cero. Escribiendo  $x^\lambda$  como  $e^{\lambda \ln x}$ ,

$$x^{(\lambda)} = \frac{e^{\lambda \ln x} - 1}{\lambda} \quad (5.48)$$

cuando  $\lambda$  tiende a cero la transformación anterior queda indeterminada. Utilizando la regla de L'Hôpital y derivando numerador y denominador :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} x^{(\lambda)} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda \ln x} \ln x}{1} = \ln x \quad (5.49)$$

esta familia incluye transformaciones logarítmica, lineal, raíz cuadrada y la inversa. Cuando  $\lambda > 1$ , la transformación produce una mayor separación o dispersión de los grandes valores de  $x$ , tanto más acusada cuanto mayor sea el valor de  $\lambda$ , mientras que  $\lambda < 1$  el efecto contrario : los valores de  $x$  grandes tienden a concentrarse y los valores pequeños a dispersarse. Si  $\lambda$  es la unidad, habrá transformación lineal, es decir, la muestra sigue normalidad.

### 5.3.3 La estimación de MV de las transformaciones Box Cox

La relación entre el modelo para los datos originales  $X$  y para los transformados  $X^{(\Lambda)}$  será :

$$f(X) = f(X^{(\Lambda)}) |J_{\Lambda}(X)| \quad (5.50)$$

siendo  $J_{\Lambda}(X)$  el determinante jacobiano de la transformación inversa  $X^{(\Lambda)} \rightarrow X$ , que es

$$|J_{\Lambda}(X)| = \prod_{k=1}^n J_{\lambda_k} = \prod_{k=1}^n \prod_{j=1}^N \frac{dx_{jk}^{(\lambda_k)}}{dx_{jk}} = \prod_{k=1}^n \left( \prod_{j=1}^N x_{jk} \right)^{\lambda_k - 1} \quad (5.51)$$

Suponiendo que  $X^{(\Lambda)}$  sigue una  $N(M, \Sigma)$  para un determinado  $\Lambda$ . La función de densidad de las variables originales será :

$$f(X) = \Sigma^{-1/2} (2\pi)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X_j^{(\Lambda)} - M)^T \Sigma^{-1} (X_j^{(\Lambda)} - M) \right\} |J_{\Lambda}(X)| \quad (5.52)$$

Por tanto, la verosimilitud de la muestra es una función del vector de medias  $M$ , la matriz de covarianza  $\Sigma$  y el vector  $\Lambda$

$$L(M, \Sigma, \Lambda) = \prod_{j=1}^N |\Sigma|^{-1/2} (2\pi)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X_j^{(\Lambda)} - M)^T \Sigma^{-1} (X_j^{(\Lambda)} - M) \right\} |J_{\Lambda}(X)| \quad (5.53)$$

el logaritmo de la verosimilitud es (salvo una constante)

$$\ell_n L(\Omega) = -\frac{N}{2} \ell_n |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \text{traza} \left\{ \Sigma^{-1} (X_j^{(\Lambda)} - M)(X_j^{(\Lambda)} - M)^T \right\} + \ell_n |J_{\Lambda}(X)| \quad (5.54)$$

$\Omega$  indica la región de los  $n+n(n+1)/2 + n$  parámetros de  $M$ ,  $\Sigma$  y  $\Lambda$ . Para unos parámetros fijados  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , la estimación máximo-verosímil de  $M$  y  $\Sigma$  es

$$\hat{M}^{(\Lambda)} = (\bar{x}_1^{(\lambda_1)}, \dots, \bar{x}_n^{(\lambda_n)})' \text{ con } \bar{x}_k^{(\lambda_k)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_{jk}^{(\lambda_k)} \quad (5.55)$$

$$\hat{\Sigma}^{(\Lambda)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i^{(\Lambda)} - M)(X_i^{(\Lambda)} - M)^T \quad (5.56)$$

Al sustituir estos valores en la verosimilitud se obtendrá lo que se denomina la función de verosimilitud concentrada en  $\Lambda$ . Su expresión es, prescindiendo de constantes

$$L(\Lambda) = \max_{M, \Sigma} \ell_n L(\Omega) = -\frac{N}{2} \ell_n |\Sigma^{(\Lambda)}| + \ell_n |J_{\Lambda}(x)| \quad (5.57)$$

Esta función sólo depende de  $\Lambda$  y los datos originales  $X$ . El siguiente paso consiste en hallar el máximo de  $L(\Lambda)$  mediante algún algoritmo numérico.

Definiendo  $X^{(\Lambda)}$  como la matriz de  $N \times n$  de datos transformados

$$L(\Lambda) = -\frac{N}{2} \ell_n |X^{(\Lambda)T} (I_n - \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T / N) X^{(\Lambda)}| + \ell_n |J_{\Lambda}(x)| \quad (5.58)$$

considerando para cada columna  $k$  de la base de datos  $X^{(\Lambda)}$ , el vector de variables normalizadas  $Z_k^{(\lambda_k)} = (z_{ij}^{(\lambda_k)})$ ,  $z_{ij}^{(\lambda_k)} = x_{ij}^{(\lambda_k)} J_{\lambda_k}^{-1/N}$

**LEMA 1:** Siendo  $Z^{(\Lambda)} = (Z_1^{(\lambda_1)}, Z_2^{(\lambda_2)}, \dots, Z_n^{(\lambda_n)})$  una matriz de  $N \times n$  variables normalizadas. La función de máxima verosimilitud para  $\Lambda$  es :

$$L_{max}(\Lambda) = -\frac{N}{2} \ell_n |Z^{(\Lambda)T} (I_n - 1_n 1_n^T / N) Z^{(\Lambda)}| \quad (5.59)$$

**Demostración:** Definiendo  $D = \text{diag} (J_{\lambda_1}^{1/N}, \dots, J_{\lambda_n}^{1/N})$  así que  $-(N/2) \ell_n |J_{\Lambda}^{2/N}(X)| = -(N/2) \ell_n |D^{-2}|$ . Desprendiéndose que las variables normalizadas se pueden poner como  $Z^{(\Lambda)} = X^{(\Lambda)} D^{-1}$ ,

$$L(\Lambda) = -\frac{N}{2} \ell_n |X^{(\Lambda)T} (D^{-1} D)^T (I_N - 1_N 1_N^T / N) X^{(\Lambda)} (D^{-1} D)| + \ell_n |J_{\Lambda}(x)| \quad (5.60)$$

Para propósitos computacionales, la expresión ( 5.60 ) muestra que el estimador de máxima verosimilitud consiste en minimizar  $\Lambda$  en el determinante :

$$|Z^{(\Lambda)T} (I_N - 1_N 1_N^T) Z^{(\Lambda)}| \quad (5.61)$$

En principio, la minización de ( 5.61 ) puede ser realizada mediante la apropiada subrutina numérica. Sin embargo, es común encontrar problemas en el determinante del jacobiano,  $J_{\Lambda}(X)$ , particularmente cuando  $N$  es grande. Considerando el lema anterior se deduce la propiedad de invariante de  $\Lambda$  ante escalamientos, recurso que es utilizado para salvar el mencionado problema.

### 5.3.4 Cambios de escala de la población

**Teorema :** Siendo  $S = \text{diag} (s_1, \dots, s_n)$  donde  $s_j > 0$ , para  $j = 1, \dots, n$ , y considerando el cambio de escala  $\tilde{X} = X S^{-1}$ . Escribiendo, en la anterior notación, la correspondiente matriz normalizada a  $\tilde{Z}^{(\Lambda)} = (\tilde{Z}^{(\lambda_1)}, \dots, \tilde{Z}^{(\lambda_n)})$ . El resultado es:

$$|\tilde{Z}^{(\Lambda)T} (I_N - 1_N 1_N^T) \tilde{Z}^{(\Lambda)}| = |S|^{-2} |Z^{(\Lambda)T} (I_N - 1_N 1_N^T) Z^{(\Lambda)}| \quad (5.62)$$

**Demostración:** Escribiendo  $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$  tal que  $\tilde{x}_j = x_j / s_j$ , llamando  $q_j = -s_j^{-1} J_{\lambda_j}^{-1/n}(x_j) s_j^{(\lambda_j)}$ , para  $j = 1, \dots, n$ , además  $J_{\lambda_j}(\tilde{x}_j) = (\prod_{i=1}^N \tilde{x}_{ij})^{\lambda_j-1} = s_j^{n(1-\lambda_j)} J_{\lambda_j}(x_j)$ . Por lo que no es difícil llegar a demostrar que  $\tilde{z}_{ij}^{(\lambda_j)} = J_{\lambda_j}^{-1/n}(\tilde{x}_j) \tilde{x}_{ij}^{(\lambda_j)} = s_j^{-1} z_{ij}^{(\lambda_j)} + q_j$ . Concluyendo con:

$$\tilde{Z}^{(\Lambda)} = Z^{(\Lambda)} S^{-1} + 1_n Q^T \quad (5.63)$$

donde el vector  $Q = (q_1, \dots, q_n)^T$ . La expresión ( 5.62 ) se obtiene de ( 5.63 ), observando que  $(I_N - 1_n 1_n^T / N) = 0$ .

Como consecuencia de ( 5.62 ), el determinante de  $\hat{\Lambda}$  no es afectado por el escalamiento de la matriz de datos, por una colección de constantes  $\{s_j\}$ . Por ejemplo en la práctica, es usual elegir el  $j$ -ésimo componente como  $s_j = \max_{1 \leq i \leq n} x_{ij}$ , tal que en la nueva matriz  $\tilde{X}$  de datos, sus valores se encuentran entre 0 y 1.

### 5.3.5 Determinación de $\hat{\Lambda}$

Aunque algunos autores [McLac92] recomiendan evitar el problema de optimización de ( 5.61 ) mediante la estimación marginal,  $\hat{\Lambda}_M = (\lambda_{jM})$ , sin embargo, Velilla [Velil92] deja constancia de la posibilidad de obtener un óptimo estimador  $\hat{\Lambda}$ , a partir de las soluciones marginales. El método propuesto por él es el siguiente:

1. Seleccionar el valor inicial a partir de los estimadores marginales,  $\hat{\Lambda}_M$ .
2. Utilizar el método numérico de Newton-Raphson, empezando con el valor inicial del punto anterior. El óptimo valor de  $\hat{\Lambda}$  se obtiene mediante la minimización de ( 5.61 )

$$\Lambda_{t+1} = \Lambda_t - (-L''(\Lambda))^{-1} \nabla(-L(\Lambda)) \quad (5.64)$$

En aplicaciones, la función  $-L(\Lambda)$  es típicamente convexa y el algoritmo converge después de pocas iteraciones. Las expresiones del vector del gradiente y la matriz Hessiana también se encuentran en [Velil92]. Haciendo uso de la nomenclatura de transposición de vectores en una matriz, sea una matriz  $H = (H_1, \dots, H_n)$ , de tamaño  $N \times n$ ,  $H_j(u)$  significa reemplazar en la columna  $j$  de  $H$  el vector columna  $u$ , además,  $H_{jk}(u,v)$  es el reemplazamiento de las columnas  $j$  y  $k$  por los vectores columna  $u, v$ , respectivamente. Del trabajo de Velilla se deducen los coeficientes del gradiente y de la matriz Hessiana como:

$$\frac{\partial L(\Lambda)}{\partial \lambda_r} = -n |M(\Lambda)|^{-1} |Z_r^{(\Lambda)T} (W_r^{(\lambda_r)}) A Z^{(\Lambda)}| \quad (5.65)$$

$$\frac{\partial^2 L(\Lambda)}{\partial^2 \lambda_r} = -n |M(\Lambda)|^{-1} \left[ \left| Z_r^{(\Lambda)T} (W_r^{(\lambda_r)}) A Z_r^{(\Lambda)} (W_r^{(\lambda_r)}) \right| + \left| Z_r^{(\Lambda)T} A Z_r^{(\Lambda)} (U_r^{(\lambda_r)}) \right| \right] \quad (5.66)$$

$$\frac{\partial^2 L(\Lambda)}{\partial \lambda_r \partial \lambda_s} = -n |M(\Lambda)|^{-1} \left[ \left| Z_{rs}^{(\Lambda)T} (W_r^{(\lambda_r)}, W_s^{(\lambda_s)}) A Z^{(\Lambda)} \right| + \left| Z_r^{(\Lambda)T} (W_r^{(\lambda_r)}) A Z_s^{(\Lambda)} (W_s^{(\lambda_s)}) \right| \right] \quad (5.67)$$

Para todo  $r, s = 1, \dots, n$

la notación empleada es  $A = (I_n - 1_n^T 1_n)$ ,  $M(\Lambda) = Z^{(\Lambda)T} A Z^{(\Lambda)}$ ,  $W_j^{(\lambda_j)} = \partial Z_j^{(\lambda_j)} / \partial \lambda_j$  y  $U_j^{(\lambda_j)} = \partial^2 Z_j^{(\lambda_j)} / \partial^2 \lambda_j$ . Las expresiones para  $W_j^{(\lambda_j)}$  y  $U_j^{(\lambda_j)}$  son dadas por Atkinson[Atkin89]. Similares expresiones han sido deducidas, considerando los vectores  $N \times 1$  de  $W_j^{(\lambda_j)} = (w_{jk}^{(\lambda_j)})$  y  $U_j^{(\lambda_j)} = (u_{jk}^{(\lambda_j)})$ :

$$w_{jk} = \frac{\frac{x_{jk}^{\lambda_k} \ell_n x_{jk} - x_{jk}^{(\lambda_k)}}{\lambda_k} - x_{jk}^{(\lambda_k)} \ell_n \left( \prod_{l=1}^N x_{lk} \right)^{1/N}}{J_{\lambda_k}^{1/n}} \quad (5.68)$$

$$u_{jk}^{(\lambda_k)} = \frac{\frac{2(x_{jk}^{(\lambda_k)} - x_{jk}^{\lambda_k} \ell_n x_{jk})}{\lambda_k^2} + \frac{x_{jk}^{\lambda_k} (\ell_n x_{jk})^2 + \ell_n \left( \prod_{l=1}^N x_{lk} \right)^{1/N} (x_{jk}^{(\lambda_k)} - x_{jk}^{\lambda_k} \ell_n x_{jk})}{\lambda_k}}{J_{\lambda_k}^{1/n}} - w_{jk} \ell_n \left( \prod_{l=1}^N x_{lk} \right)^{1/N} \quad (5.69)$$

### 5.3.6 Intervalos de confianza y prueba de normalidad

Este procedimiento proporciona además intervalos de confianza para el valor de  $\Lambda$  y un test de normalidad. En efecto, la distribución del logaritmo del ratio de verosimilitudes es asintóticamente una  $\chi^2$  con  $n$  grados de libertad. Al estar próximo el estimador  $\hat{\Lambda}$  de su verdadero valor  $\Lambda$ , sus verosimilitudes serán puntos análogos. Desarrollando en serie  $L(\Lambda)$  alrededor de  $\hat{\Lambda}$

$$L(\Lambda) \approx L(\hat{\Lambda}) + \nabla L(\hat{\Lambda})(\Lambda - \hat{\Lambda}) + \frac{1}{2} [(\Lambda - \hat{\Lambda})^T H(\hat{\Lambda})(\Lambda - \hat{\Lambda})] \quad (5.70)$$

donde  $\nabla L(\Lambda)$  representa el vector de las primeras derivadas, y  $H(\Lambda)$  es la matriz hessiana de segundas derivadas, ambas evaluadas en el punto  $\Lambda = \hat{\Lambda}$ ; como, por definición, las primeras derivadas son nulas en el máximo, y la matriz hessiana es, en ese punto, definida negativa. El contraste de razón de verosimilitudes, es :

$$2(L(\hat{\Lambda}) - L(\Lambda)) \approx (\Lambda - \hat{\Lambda})^T (-H(\hat{\Lambda})) (\Lambda - \hat{\Lambda}) \quad (5.71)$$

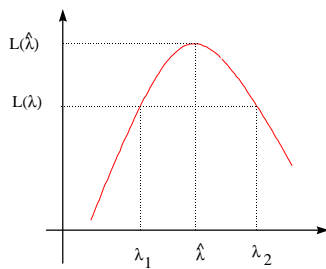
que es la distancia de Mahalanobis entre  $\Lambda$  y  $\hat{\Lambda}$ . En efecto, si es cierto que están próximas, asintóticamente  $\hat{\Lambda}$  es centrado, con media en el verdadero valor  $\Lambda$  y matriz de varianzas y covarianzas  $(-H(\hat{\Lambda}))^{-1}$ , teniendo además una distribución normal. Como sea cierta la hipótesis, el contraste sigue una  $\chi^2$  con  $n$  grados de libertad.

Fijando un nivel de confianza  $\alpha$ , se puede construir un intervalo de confianza para el valor de la función de verosimilitud en el verdadero valor de  $\Lambda$ . Sea  $\chi^2(\alpha)$  el valor de la distribución  $\chi^2$  con  $n$  grados de libertad que deja la probabilidad  $\alpha$  a la izquierda, entonces:

$$L(\hat{\Lambda}) - L(\Lambda) \leq \frac{1}{2} \chi_n^2(\alpha) \quad (5.72)$$

que implica:

$$L(\Lambda) \geq L(\hat{\Lambda}) - \frac{1}{2} \chi_n^2(\alpha) \quad (5.73)$$



cortando la función  $L(\Lambda)$  con la ordenada  $L(\hat{\Lambda}) - \frac{1}{2} \chi_n^2(\alpha)$  se obtendrán dos valores para el parámetro que definirán un intervalo de confianza para  $\Lambda$ . Si el valor de  $\Lambda$  está incluido en dicho intervalo, se aceptará la hipótesis de normalidad con un nivel de significación  $\alpha$ , mientras que se rechazará la normalidad en otro caso. Este contraste es muy potente para detectar asimetría, pero poco eficaz para el apuntamiento[Peña87].

**Figura 5.17 Estimación gráfica de  $\lambda$  y de un intervalo de confianza**

## 5.4 Agrupación de datos en los defectos de planchas de aluminio

Para ilustrar la forma de abordar este tipo de tareas, se utiliza el estudio de la clasificación de defectos en planchas de aluminio mediante colada continua. Conviene tener presente que la metodología que aquí se desarrolla, en principio, podría ser aplicable a problemas de muy diferentes campos, con el Reconocimiento de formas como denominador común.

Partiendo de las imágenes segmentadas, conseguidas mediante el sistema de detección de defectos locales, se tiene la intención de clasificar los defectos en cinco u ocho clases, según se puede ver en la Tabla 5.2. Las imperfecciones obtenidas en el proceso de obtención del aluminio, quedan reflejadas en su apariencia, de esta manera es posible manejar el tipo de problema que se ha producido en la planta, mediante la inspección visual de la superficie. Las diferencias a cinco u ocho consisten en una subclasificación de tres defectos principales. A ocho tipos, además de los cinco anteriores, se distinguirán faltas de material pequeñas o grandes, líneas calientes o arañazos y bandas transversales claras o pegados. El capítulo 7 muestra las formas visuales de los diferentes tipos de alteraciones producidas en las planchas.

**Tabla 5.2 Defectos del aluminio colado**

Nombre del defecto	Apariencia	Causa
Carencia de material (La) (Lg)	Faltas de material en secciones de la lámina	Insuficiente suministro de nivel de caja
Cristalización anormal (Cr)	Presentación de bandas opacas longitudinales en la superficie	Exceso de grafito
Adhesiones (St)	Bandas transversales oscuras y distorsiones en la lámina	Insuficiente lubricación
Bandas brillantes(Br)	Presencia de bandas transversales brillantes	Presencia de burbujas
Líneas calientes (Lo) (Ar)	En una primera etapa bandas oscuras y longitudinales, y luego superficie con agarrones	Incremento de temperatura
Desconches en el fundido (Tr)	Reconocible por la presencia de bandas transversales oscuras	Atascamiento de tolva



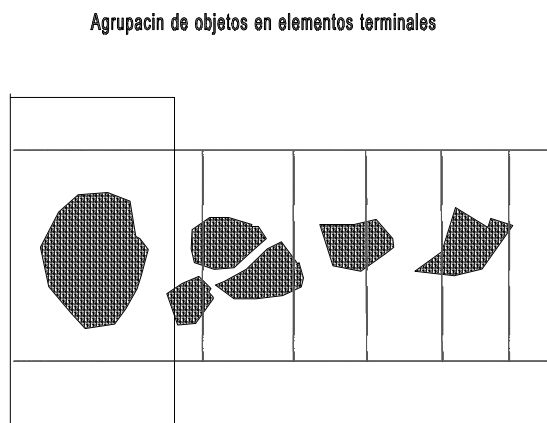
### 5.4.1 Extracción del vector de características

La metodología a partir de la detección de los defectos, consiste primeramente en el estudio de las características obtenidas de la etapa de extracción, en segundo lugar es preciso realizar una selección de las mejores características tomando la información más relevante. Para una mayor interpretación de la estructura de los patrones se le someterá a análisis de los datos, con el fin de conocer las posibles subclases subyacentes en la muestra controlada. Estos grupos servirán para el diseño de los futuros clasificadores.

Para la primera etapa se hace uso de técnicas de análisis sintáctico[Fu88][Fu82] para la representación del defecto y se extrae el mayor número posible de atributos de los objetos, características de la forma de los límites y de las regiones con técnicas de transformación escalar, atendiendo a la clasificación de Pavlidis[Venon91]. Las diferentes fases de decantación de las primitivas provocaron la selección de los descriptores de los objetos. El conocimiento de direcciones privilegiadas de los defectos en bandas transversales, horizontales o en manchas, hizo sugerir la utilización de algoritmos de continuidad de la masa defectuosa, obteniéndose la transformación de objetos a elementos terminales comunes a todas las gramáticas. Y asociados con los elementos terminales se pasan atributos de mayor nivel de abstracción que en la anterior etapa. Estos elementos terminales serán las fuentes de información para los siguientes módulos.

#### 5.4.1.1 Método de obtención de las elementos terminales

Una vez detectado el defecto, segmentado y etiquetado. La tarjeta de visión pasará los descriptores de los objetos que servirán de vector de entrada al algoritmo de agrupación. Posteriormente se hace una ordenación por áreas de los objetos en cada región de imagen de interés, pasando seguidamente a caracterizar cada objeto por su forma (puntos, manchas, cuerpos longitudinales y cuerpos transversales) y por su compacidad. Seguidamente se asocian objetos a un elemento terminal a partir de los objetos más significativos (semillas), utilizando principios de continuidad y proximidad. Ultimando la operación con el etiquetado y paso de características de medio nivel de los elementos terminales. La tonalidad del defecto supone etiquetamientos separados, de un lado defectos con apariencias claras y posteriormente defectos tipos oscuros.

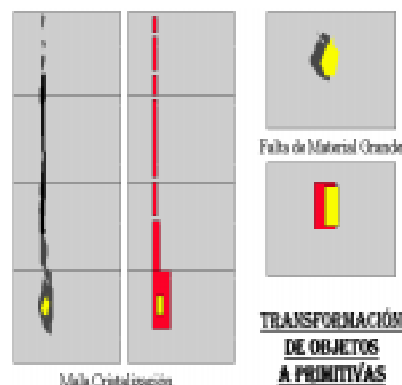


**Figura 5.18** Asociación de objetos a un elemento terminal

Por cada defecto se tendrá un árbol de información, en el que cada nodo de este árbol, estarán presentes los elementos terminales y la información de medio nivel, de cada una de las regiones de imagen de interés implicados en el defecto. La figura 5.19 muestra la forma de actuar con dos tipos de defectos.

Llegado a este punto se tendrá una colección de elementos terminales dispuesta a ser analizada por los clasificadores basados en reglas de concatenación, pero también es requerido un vector de características para los clasificadores basados en datos. Se necesita aplicar una transformación desde la agrupación secuencial de elementos terminales a un vector de características con dimensión  $n$ .

Si la representación de los objetos mediante elementos terminales es posible y fiable, para el caso aquí tratado así lo muestran las representaciones virtuales y los resultados de los clasificadores sintácticos, éstas se pueden convertir en fuentes de entrada para clasificadores basados en un vector de características. Luego, la idea es condensar la información de elementos terminales en un vector. Para tal fin, se puede hacer uso de las áreas asociadas a cada tipo de elementos terminales, momentos de inercia, suma de perímetros de los elementos terminales y otras posibles características que pudieran integrar el vector de características.



**Figura 5.19 Ejemplos de descripción de defectos mediante elementos terminales**

Este método ofrece múltiples ventajas. Primero si hay fiabilidad de la representación de los objetos mediante elementos terminales, la información generada es infinitamente menor y por ende el vector de características tiene una dimensión muy reducida.

Segundo, la calidad del vector de características viene determinado por la calidad de información de los elementos terminales. La información de los elementos terminales es de un nivel muy superior a los descriptores clásicos pues tiene información de la estructura del defecto (si es alargado, tiene bandas, su situación espacial,...).

Tercero, el vector de características se forma una vez que se tiene detectado la totalidad del defecto. No hay un vector de características por cada imagen obtenida sino por la globalidad de imágenes que constituyen el defecto.

Cuarto, las características son muy homogéneas si se utilizan criterios comunes en la selección de éstas. Por ejemplo, la suma de las áreas de cada uno de los elementos terminales existentes.

Quinto, la dimensión del vector de características es muy pequeña, ya que la información contenida en cada uno de los elementos, es una información cualitativa y no

cuantitativa. La conclusión es inmediata, los clasificadores basados en vectores serán muy rápidos y permitirán el uso de varios clasificadores complementarios en línea.

El siguiente problema es construir el vector de características tal que ayudará al correcto diseño de los clasificadores basados en datos.

#### **5.4.1.2 Transformación de elementos terminales a vector de características**

La transformación de la información de elementos terminales a vector de característica está formada por dos grupos de características, datos generales que hacen referencias a las magnitudes de los defecto, y datos de la estructura interna, indicando los porcentajes de las diferentes topologías que conforman el defecto total.

-Datos generales: Se especificará el ancho y largo de la totalidad del defecto, mediante radios de giro para evitar la influencia de errores producidos por la segmentación. También se añaden las coordenadas de sus centros de gravedad, junto con los momentos de inercia del defecto total respecto de rectas horizontal y vertical que pasan por el centro de masas. Estos cinco datos se calculan por separado para la parte del defecto que tenga tonalidad oscura y para la que es clara, teniendo así los primeros 10 datos de entrada al vector.

-Datos de estructura interna: Estos datos darán la información de cómo se estructura el defecto en sus diferentes elementos terminales. Se da por tanto la suma de las masas de cada una de las ocho diferentes clases de elementos terminales que componen el defecto.

Un estudio cuidadoso del vector de las características fue realizado mediante técnicas de Análisis multivariante. Hay dos tendencias tradicionales, la eliminación de las componentes que menos contribuyan a la explicación de la varianza y el segundo método tratar de estimar nuevas características, menores en número, que siendo factores comunes a las anteriores, recojan la discriminación intrínseca de las clases[Escud77]. Esta última técnica será desarrollada en el próximo capítulo. En un primer bosquejo del estudio del vector, se aplican las técnicas de Análisis discriminante desde una concepción global, es decir, observar el carácter discriminante en el espacio de entrada del problema. Las componentes principales permitirán conocer el grado de explicación acumulativa de cada componente. De otro lado, para que las componentes representen adecuadamente tamaño y forma, deben cumplirse las condiciones de Rao[Rao71], esto es, todos los coeficientes de la primera componente principal deben ser positivos, identificando tamaños, mientras los coeficientes de las siguientes componentes deben ser positivos y negativos, discriminando formas. Esta prueba fue superada por el vector construido. Además se pueden utilizar métodos de análisis de la varianza, como manova, que permiten dar un *ranking* de las componentes del vector de entrada, bajo suposiciones de dependencia entre características y distribuciones multinormales. Llegado a este punto, donde se tiene construido el vector de características, se puede pasar al análisis exploratorio de los datos.

### 5.4.2 Análisis de los datos

Para el primer análisis se parte de los valores numéricos de cada característica estandarizada, con la idea de dar inicialmente la misma importancia a todas [Spieg88].

$$x'_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sigma_j} \quad ( 5.74 )$$

siendo  $\bar{x}_j$  y  $\sigma_j$  la media y varianza de la componente  $j$  del conjunto de muestras, mientras  $x_{ij}$  e  $x'_{ij}$  es el valor de la muestra  $i$  de la componente  $j$  y su reducida.

El entrenamiento se hizo con enrejado hexagonal y función de vecindad gaussiana, al favorecer la estabilización del proceso de aprendizaje [Som92]. Por otro lado, como los vectores de referencia  $M_i$  tienen que aproximarse a  $p(X)$ , es deseable encontrar aquella forma de los lados del array cuyas dimensiones correspondan con las magnitudes principales de la distribución del espacio de entrada, de lo que se desprende hacer una primera observación visual de  $p(X)$ , por ejemplo con mapas de Sammon, y determinar la relación  $n_x/n_y$ <sup>3</sup>.

Se definieron procesos de aprendizaje, partiendo con diferentes valores iniciales de los vectores de referencia, aplicando sucesiones de entrenamientos distintas y modificando parámetros de aprendizaje. Al final, la selección del mapa más oportuno fue de aquel con menor error de cuantificación.

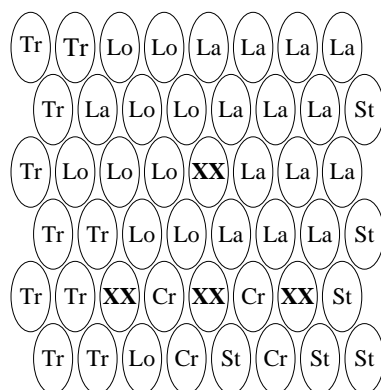
Posteriormente, se procedió a la fase de etiquetamientos de las neuronas del mapa. Kohonen propone un método de votación, por cada vector dato etiquetado se busca la correspondiente neurona activa. Las neuronas del mapa se etiquetan de acuerdo con la mayoría de las etiquetas que golpean ( *hitting* ) una neurona particular del mapa. Las que no son golpeadas se dejan sin etiquetar (**XX**).

El método propuesto en la actuación es más restrictivo, al etiquetarse aquellas neuronas que en el conjunto total de muestras ( testeo + aprendizaje ) han sido validadas sin ninguna votación en contra. Su origen reside en localizar la función de densidad del *cluster* (ver apartado 5.2). El resto se marcará con **YY** o **XX** si no hay suficientes patrones capaces de inferir el tipo de clase a la que pertenecen. Las neuronas **YY** muestran que ha habido votaciones confusas o lo que es lo mismo, existe influencia de varias clases en el conjunto de Voronoi de estas neuronas. La razón de etiquetarlas como confusas es evidente, como ha sido comentado, éstas son remansos de funciones de distribución de grupos vecinos. Los vectores de referencia son distribuidos estadísticamente según el

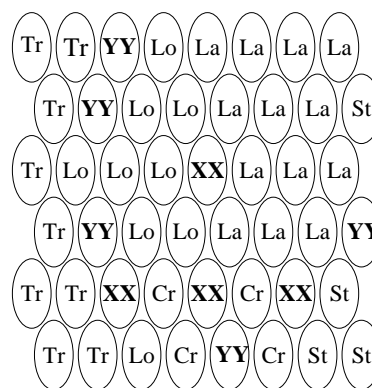
---

<sup>3</sup>Al utilizar los mapas de Sammon [SAMM69] para determinar la relación  $n_x/n_y$  del caso que ocupa, resultado ser de 28/23 y se probaron las combinaciones 7x5, 7x6, 8x6 y 8x7. Finalmente se escogió la dimensión 8x6 por el menor error de cuantización

espacio de medidas, y si se parte de vectores bien definidos en sus componentes, el entrenamiento provocará una discretización del espacio de entrada en regiones de influencia. Cada región estará dominada por un grupo homogéneo de vectores. Y sucederá que existen neuronas, cuyos conjuntos de Voronoi confluyan grupos distintos. El objetivo de marcarlas como defectuosas está claro, son justo estas neuronas a las que se debe prestar mayor atención e intentar solventar el problema de discriminación introduciendo mayor conocimiento a priori.



**Figura 5.21 Etiquetamiento según Kohonen a cinco tipos**



**Figura 5.20 Etiquetamiento propuesto**

Hay que destacar cómo la elección de variables discretas influye en el mapa, así se observa que de izquierdas a derechas hay una tendencia de defectos oscuros a claros. Y de arriba abajo, de defectos de menor a menor tamaño. Posteriormente este efecto podrá ser observado al terminar la fase de *clustering*.

Si los vectores de referencia son etiquetados con la muestra a ocho tipos de defectos, los resultados son análogos, obsérvese que la única modificación está en el etiquetado y no en el aprendizaje (“no supervisado”). Lo único que aporta, es que la clasificación a ocho defectos es coherente con la muestra etiquetada a cinco. Las diferencias son observables en el cambio de alguna etiqueta perteneciente al mismo macro-grupo (las bandas longitudinales se dividen en arañazos y bandas, ..., etc).

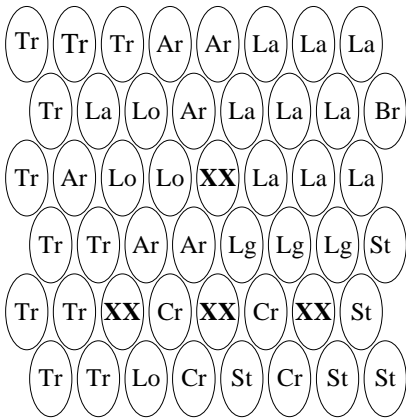


Figura 5.22 Etiketamiento según Kohonen a ocho tipos

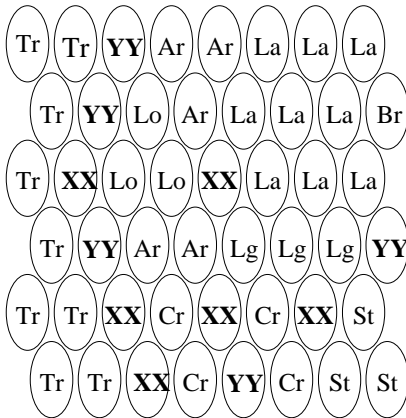


Figura 5.23 Etiketamiento propuesto a ocho

Estos mapas de rasgos han servido para detectar diferentes zonas de influencias correspondientes a topologías de defectos similares. Desde el punto de vista del Reconocimiento de patrones, los mapas de Kohonen han permitido empezar a conocer la estructura inherente de los patrones.

La cuestión siguiente a abordar es la delimitación de las regiones o dominios en el espacio de entrada, que se correspondan con patrones similares, los cuales constituyan un grupo homogéneo. Esta información no está de manera explícita en los mapas, se propone un proceso de decantación de *cluster* basados en las U-Matriz de *Uils et al* combinadas con descripciones de los patrones y pruebas de normalidad.

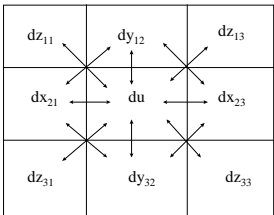


Figura 5.25 U-Matriz con entrenamiento rectangular

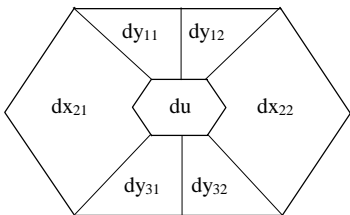


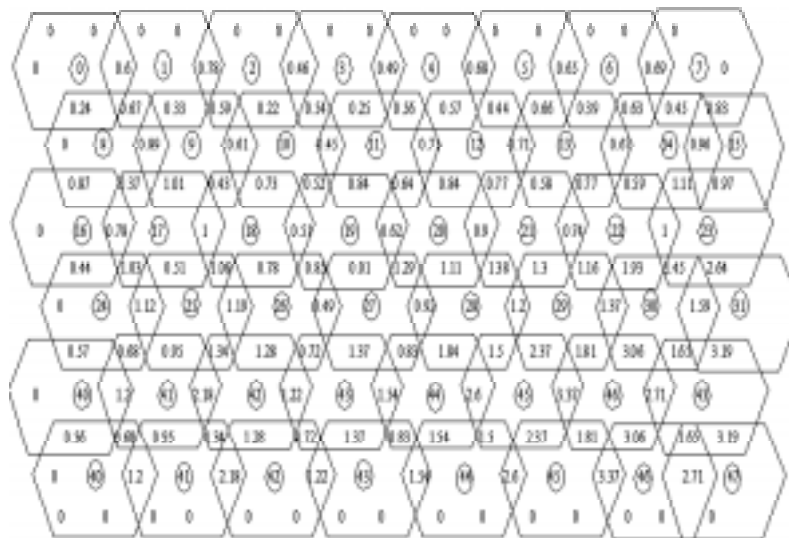
Figura 5.24 U-Matriz con entrenamiento hexagonal

5.4.3 Aplicación de las U-Matriz al análisis de los defectos del aluminio

La primera dificultad planteada fue adaptar la filosofía de las U-Matriz a un enrejado de tipo hexagonal, utilizado en la exploración de los datos. En las vecindades

rectangulares, los autores proponen un valor medio de las distancias euclídeas entre neuronas situadas en posiciones diagonales en forma de aspa (ver Figura 5.25), siendo ésta la interpretación geométrica de “dz”, correspondiente a la influencia colateral del aprendizaje rectangular. Pero en el proceso de entrenamiento hexagonal, tales influencias no existen, las neuronas presentan una agrupación más homogénea, sus relaciones con las vecinas son indistintas (ver párrafo sobre el estudio de la vecindad 5.1.1.7), no teniendo necesidad de considerar evaluaciones distintas en la distribución espacial; justificando la modificación en la obtención de la U-Matriz, en cuanto que los elementos de la matriz estarán formados por las distancias de la neurona  $a_{ij}$  a sus vecinas, sin consideraciones de valores promediados en las vecindades diagonales (Figura 5.24, Figura 5.25 ).

El resultado de aplicar los conceptos de la U-Matriz modificada sobre el mapa auto organizado es mostrado en Figura 5.26. Una primera observación muestra que los bordes de separación no son nítidos, pero sí empieza a sugerir una versión preliminar de mapa de rasgos. Es interesante apreciar cómo las neuronas etiquetadas como confusas, aparecen rodeadas de grupos, confirmando las suposiciones anteriores de servir estas neuronas, como remansos de las funciones de densidad de grupos próximos.



**Figura 5.26 U-Matriz del mapa auto organizado de los defectos**

Se distingue cómo en los defectos de mayor dimensión, en cuanto a la magnitud física del defecto, sus distancias entre neuronas vecinas aumenta, reflejando que los espacios de influencias de estas neuronas son más grandes, indicando una mayor variabilidad de los patrones visuales que tienden a ser representados por estas neuronas. Pudiera pensarse en por qué no hay más representantes de estas zonas, y si se ha de suponer que los mapas tienden a ser imágenes de la función de densidad del espacio de medida, también recibe el impacto de la probabilidad del tipo de defecto en aparecer en la plancha. Tal constatación queda medianamente clara en las tablas, de las que puede

apreciarse las probabilidades del defecto y el tanto por ciento de vectores de referencia etiquetados como tal tipo ( efecto factor magnificación ).

Denominación del defecto	Probabilidad del defecto	Vect.Ref.Etiq/Vect.Totales
Tr	24	23
Lo	28	26
La	26	31
Cr	12	10
St	11	10

**Tabla 5.3 Probabilidad de aparición a 5 defectos**

Denominación del defecto	Probabilidad del defecto	Vect.Ref.Etiq/Vect.Totales
Tr	24	23
Lo	12	15
Ar	14	11
La	24	26
Lg	4	5
Cr	12	10
Br	5	3
St	6	7

**Tabla 5.4 Probabilidades de aparición a 8 defectos**

Otra observación interesante es contemplar cómo los vectores de referencia etiquetados son distribuidos de izquierdas a derechas y de arriba a abajo, con defectos de oscuros a claros y de menor tamaño a mayor, coincidiendo con las dos primeras componentes principales de tamaño y forma del vector de características, que garantizaba las suposiciones de Rao. Véase que todas las variables del problema se distribuyen esencialmente siguiendo uno de los ejes del mapa, bien el OX, bien el OY, de modo que la categorización cuenta con dos dimensiones principales, referenciándose tamaño y forma. Es ésta una clara manifestación de la selección automática de los rasgos que, como se ha explicado en este capítulo, presentan las SOM. La dimensión relacionada con el eje OY es fundamentalmente de tamaño, mientras que la relacionada con el eje OX es de forma (Figura 5.27).



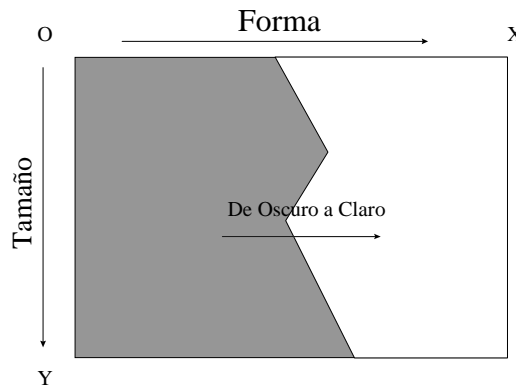


Figura 5.27 Componentes principales del mapa

La versión preliminar de los *cluster* es decantada por un lado de la U-Matriz, y al no haber un umbral que defina con absoluta objetividad los grupos, el asesoramiento para la definición de éstos, vendrá dado por la descripción de los patrones que cae en cada una de las neuronas. Luego el planteamiento es el siguiente:

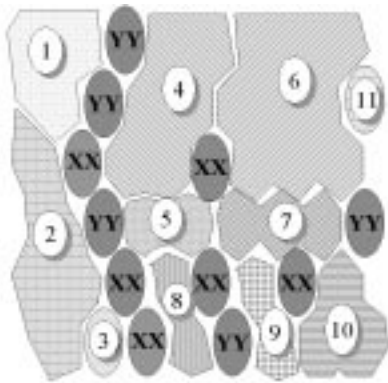
1. Mapa SOM +U-Matriz
2. Descripción de las formas de los patrones para cada neurona
3. Formación del *cluster* como asociación de espacios de Voronoi que estén próximos entre sí (U-Matriz) y con descripciones de patrones similares.

La Tabla 5.5 recoge como se ha definido la agrupación; la observación de las características de los patrones que caen en la influencia de las neuronas asociadas, puede ser contemplado en la tercera columna, mientras la cuarta muestra la menor y mayor distancia euclídea entre neuronas dentro del *cluster* y la quinta indica las distancias con las neuronas vecinas de otros grupos; evidenciando que el método ayuda pero no es concluyente. Los resultados quedan reflejados en la figura 5.28.

Número del cluster	Número de neuronas	Descripción	U-Min/U-Max	U-Min/U-Max
1	0,1,8	Conjunto de finas bandas transversales que ocupan entre 1/3 y 2/3 de la banda de una ROI	0.24/ 0.67	0.4/0.9
2	16,24,32,33,40	Bandas transversales oscuras de tamaño medio y superior. Ocupa casi o totalmente una ROI	0.44/0.67	0.78/1.62
3	41	Machas oscuras grandes de decenas de miles de píxeles oscuros	-/-	0.95/2.18
4a,b	3,4,10,11,18,19	Pocos píxeles defectuosos en forma de bandas longitudinales, apariencia de arañazos	0.25/0.84	0.62/1
5	26,27	Bandas longitudinales oscuras alrededor de unos centenares de píxeles oscuros	0.48/0.48	0.78/1.96
6	5,6,7,12,13,14,21,22,23	Falta de material pequeña, centenares de píxeles defectuosos, claros y oscuros	0.39/1	0.68/1.9
7	28,29,30	Faltas de material de gran tamaño	1.19/1.37	0.92/4.06
8	35,43	Bandas longitudinales oscuras de 2 a 4 ROIS, con alrededor de mil a diez mil píxeles oscuros defectuosos	1.32/1.32	0.85/1.53
9	37,45	Bandas con una ancha cabeza que disminuye longitudinalmente, de 3 a 5 ROIS, decenas de miles de píxeles oscuros	2.37/2.37	2.38/3.36
10	39,46,47	Pegados de rodillo, no menos de 4 ROIS y más de 10.000 píxeles de error tanto oscuro como claros	1.65/3.19	2.33/3.36
11	15	Bandas transversales claras y grandes, cubren casi toda la banda ROI y con un grosor entre 1/5 y 1/3	-/-	0.83/0.96

**Tabla 5.5 Descripción de los defectos**

En los tratados de análisis de datos se busca la formación de los *cluster* como adiciones de espacios de Voronoi correspondientes a neuronas próximas entre sí y catalogadas como similares. Este método de actuación puede ser utilizado cuando se trabaja con mapas donde no hay conflictividades, es decir, mapas caracterizados por tener más neuronas que patrones, como es el caso de *Serrano et al* [Serran93] que estudia la crisis bancaria española mediante SOM. Pero al utilizar un número mayor de patrones que neuronas, como es el caso aquí planteado, y al existir neuronas confusas, no se trata de definir si una neurona forma parte de un presunto *cluster* cuando ésta ha tenido votaciones contradictorias, sólo constituirán un grupo aquellas neuronas sin votaciones en contra, dejando sin agrupar las neuronas confusas.



**Figura 5.28** Grupos obtenidos después de aplicar el método Cluster: 1- Bandas transversales oscuras pequeñas, 2- Bandas transversales oscuras medianas, 3- Manchas oscuras, 4a,b- Arañazos, 5- bandas longitudinales oscuras, 6- Faltas de material grande, 7 - Faltas de material grande, 8- Cristalización anormal I 9- Cristalización anormal II 10- Pegado de rodillos, 11- Bandas brillantes

Las neuronas ya han hecho su trabajo, dividir el espacio de características y agruparse razonablemente bien formando *cluster*, es el momento de introducir metodología estadística para refinar el *cluster* y realizar la selección de las características.

#### 5.4.4 Eliminación de componentes sin información estadística

En el proceso de formación de los mapas auto organizados, algunas de las variables utilizadas son más cualitativas que cuantitativas, con el objetivo de favorecer la organización del mapa en regiones. Así al introducir estas variables, los tipos de patrones que ocupan posiciones muy diferentes en el espacio de medida, también en sus proyecciones sobre el mapa de Kohonen observan ubicaciones alejadas (véase figura 5.28 y Tabla 5.5 sobre los defectos en el aluminio).

En el caso de clasificación de defectos visuales en el aluminio, al introducir características según la tonalidad del defecto en el vector, implica que parte de las componentes de éste quedarán canceladas. Por ejemplo, existen algunos tipos de defectos con una única tonalidad, bandas longitudinales, bandas transversales y manchas, todas ellas con apariencia oscura, mientras otras aparecen bandas brillantes con apariencia exclusivamente clara. Las proyecciones en el SOM de estos dos tipos se encuentran alejadas. Pero los *clusters* de la misma tonalidad están próximos entre sí y mantienen la misma información de las características asociadas a la otra tonalidad. Por consiguiente parte del vector de medidas quedará cancelado al no haber información, reduciéndose el espacio sensiblemente. Estas componentes desde el punto de vista de inferencia de funciones de densidad no aportan nada, al contrario tienden anular a la matriz de covarianza. No obstante, pudieran ser atrayentes, en algunos casos, bajo el prisma de obtención de clasificadores híbridos de variables discretas y continuas.

La eliminación no puede conseguirse mediante medidas de dispersión basadas en desviaciones típicas, al ser éstas muy sensibles a observaciones atípicas. El uso de medidas de dispersión asociadas a la mediana, tienen la propiedad de ser robustas frente al ruido de las muestras. Para la valoración de las componentes se toman las muestras que caen dentro del presunto *cluster* y se aplica la mediana, al que se ha modificado ligeramente para una observación rápida:

$$u(\text{mediana}(|x_{ij} - \text{mediana}(x_{ij})|)) \quad i = 1, 2, \dots, n_k \quad (5.75)$$

siendo  $x_{ij}$  la muestra  $i$  del *cluster*  $k$  de la componente  $j$  y  $u(\cdot)$  una función de tipo escalón. Cuando el resultado es uno, hace referencia a una componente no binaria, en caso contrario ésta sí lo será. Los resultados coinciden con la geometría y tonalidad de los defectos, es decir, se anulan aquellas componentes que no tengan la tonalidad del defecto y las que difieran en su fisionomía. Obsérvese la tabla de abajo que muestra lo mencionado en este párrafo. Además, se ha comprobado que los vectores de referencia corroboran las componentes discretas, al tener similares coeficientes en estas componentes.

Cluster	Nombre	Componentes	Observaciones
1	Tr1	1,2,3,4,5 y 13	Banda transversal oscura de pequeño tamaño
2	Tr2	1,2,3,4,5 y 13	Banda transversal oscura de mayor tamaño
3	Tr3	1,2,3,4,5 y 15	Manchas oscuras
4a.b	Ln1	1,2,3,4,5,11 y 17	Bandas longitudinales oscuras de pequeño tamaño
5	Ln2	1,2,3,4,5,11 y 17	Bandas longitudinales oscuras de mayor tamaño
6	Lk1	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,15 y 16	Defectos oscuros y claros en forma de mancha
7	Lk2	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11, 14,15,16,17	Defectos oscuros y claros en forma de mancha de mayor tamaño
8	Cr1	1,2,3,4,5,11 y 17	Bandas de cristalización con tonalidad oscura
9	Cr2	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11, 12,13,16,17,18	Bandas de cristalización con faltas de material
10	St2	Todas las componentes	Bandas transversales claras y oscuras
11	St1	6,7,8,9,10 y 14	Bandas transversales claras

**Tabla 5.6 Componentes seleccionadas tras la etapa de eliminación de variables discretas**

#### 5.4.5 Búsqueda de espacio normales

Una vez eliminadas las componentes, se buscan los subespacios normales haciendo uso del test de Shapiro y el algoritmo de exploración, según se vio en 5.3.1.3. Las pruebas realizadas sobre los grupos de defectos de aluminio se reflejan en la tabla de abajo

Cluster	n	$\alpha= 0.2$	$\alpha= 0.15$	$\alpha= 0.1$
1	6	3	3	3
2	7	1	2	2
3	12	3	3	3
4a,b	6	1	1	1
5	6	5	5	5
6	7	4	4	4
7	15	4	4	4
8	7	5	5	6
9	6	3	3	3
10	16	6	6	6
11	18	2	3	3

Tabla 5.7 Dimensión de los subespacios normales

En la tabla queda constancia de los distintos subespacios normales atendiendo al nivel de significación,  $\alpha$ . Se observa que el *cluster* 4 tiene una única componente que sigue normalidad, por lo que se procedió a subdividir el *cluster* tal que pudiera aumentar el subespacio, pasando al definitivo mapa de grupos (ver figura 5.29). No obstante, el diseño de los clasificadores paramétricos permitirá localizar una selección de las características en función de las transformaciones normalizantes propuestas, esto es, Box Cox. Al requerir información sobre los clasificadores paramétricos, los resultados experimentales se posponen para el siguiente capítulo.

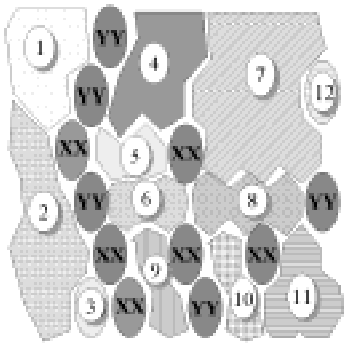


Figura 5.29 Mapa de grupos definitivo

## 5.5 Conclusiones

---

Se ha presentado una nueva metodología de *clustering* paramétrico que empieza en este capítulo con el análisis de los datos y finaliza en el siguiente con la selección de las características y su parametrización. Su fundamento está en los mapas auto organizados, en la parametrización del espacio mediante funciones normales y en las transformaciones Box Cox. Se ha utilizado la clasificación de los defectos locales en planchas de aluminio para el desarrollo experimental.

Partiendo de una colección de muestras etiquetadas de defectos locales en planchas de aluminio, se procedió a segmentación de los defectos y a una extracción de características mediante técnicas de análisis sintáctico. Posteriormente se pasó a la conversión de la información desde primitivas a un vector de  $L$ -dimensión, habiéndose hecho la elección de las oportunas componentes.

El etiquetamiento de los defectos fue realizado mediante la percepción visual de éstos y bajo las consideraciones oportunas de clasificación dadas por el fabricante del aluminio. Así pues, se parte de una base de conocimiento etiquetada a cinco y ocho defectos. Ahora bien, los defectos en una misma clase mantienen topologías bien diferenciadas, lo que supone que los vectores de medidas no mantienen la misma situación en el espacio de características, efecto que ha podido ser estudiado mediante los mapas auto organizados. Estos mapas de rasgos han servido para detectar diferentes zonas de influencias correspondientes a topologías de defectos similares. Desde el punto de vista del Reconocimiento de formas, los mapas de Kohonen han permitido conocer la estructura inherente de los patrones, de lo que se ha comentado en esta tesis medianamente. No obstante, la formación de *cluster* no es inmediata a partir de la información otorgada por dichas neuronas, más bien es el principio; *Ults et al* proponen las U-Matriz como elemento de apoyo en la formación de los clusters en los patrones. La experiencia ha mostrado que si bien es una buena herramienta, en este caso no decide de forma evidente las fronteras entre los grupos; se podría decir que las fronteras obtenidas son difusas y no tan evidente como exponen en sus artículos. Además, sus propuestas van orientadas a matrices rectangulares y es recomendable hacer uso de aprendizajes con vecindades hexagonales, pues la literatura recomienda este entorno de vecindad para la formación de mapas de rasgos; así que se ha utilizado una nueva versión de las U-Matriz aplicada para vecindades hexagonales.

De otro lado, Kohonen propone para el etiquetamiento de las neuronas un proceso de votación de las muestras de aprendizaje y que de forma “democrática” las neuronas se etiqueten con aquellas clases que más votos hayan conseguido. La propuesta aquí hecha es diferente, sólo serán etiquetadas aquellas neuronas que hubieran conseguido unanimidad. La razón es evidente, como es conocido, sus vectores de referencia son distribuidos estadísticamente según el espacio de medidas. Luego, si se parte de vectores de referencia bien definidos, el entrenamiento habrá generado regiones del espacio de entrada dependiente de algún grupo inherente, por lo que los entornos de Voronoi pertenecientes a neuronas etiquetadas con varias clases, corresponderán con zonas de conflicto, en definitiva que dentro de su región de influencia, hay concurrencia de varias clases. La experiencia ha corroborado con las suposiciones.

Llegado a este punto se tendrán grupos de neuronas, en cuyos entornos de Voronoi no hay duda de la validez de pertenencia de un vector caído en su entorno a la etiqueta dada. No obstante, es menester indicar que la inferencia es extraída del conjunto de muestras. Si a estos juicios se añade la información dada por las U-Matriz permitirá generar posibles *clusters* candidatos. Hay que decir candidatos, ya que las barreras obtenidas por las U-Matriz son más bien borrosas y orientativas, que definitivas, tal como se ha comentado en 5.3. En esta coyuntura, se plantea reforzar la decisión de agrupamiento mediante la búsqueda de subespacios normales.

Tal como se recoge en la formación de un sistema de reconocimiento de patrones, es necesario introducir tanto componentes continuas como discretas, si estas últimas cumplen con el requisito de tener comportamientos absolutamente dispares en regiones diferentes. Estas componentes ayudan mucho en el mapa auto organizado a la hora de separar regiones de influencia. Pero también es evidente que estas componentes dentro del propio *cluster* mantienen valores muy similares. Desde el punto de vista de análisis estadístico, éstas no van a dar información sobre la función de distribución. Lo que supone, no considerarlas explícitamente en el índice de homogeneidad. El criterio utilizado es primero verificar que las muestras pertenecientes al *cluster*, excluidas las componentes discretas, siguen una distribución multinormal; con tal fin se pasa el test de normalidad y en caso de ser rechazada la hipótesis se plantean transformaciones no lineales siguiendo el algoritmo numérico de *Andrews et al.*

Las transformaciones normalizantes de Box Cox permitirán obtener los subespacios normales de los clusters, tal que dicha transformación sea común con otros grupos cercanos, motivando una búsqueda que maximice la distancia entre grupos disjuntos y cercanos. Con tal propósito, en el siguiente capítulo se va a exponer la teoría de clasificadores paramétricos y sus medidas, pudiendo de esta forma acabar la técnica de *clustering* parametrizado.

# 6

## Clasificadores estáticos

---

En general, en un sistema de inspección visual se trata de clasificar las formas visuales de los defectos locales, ofreciéndose éstos como patrones de tipo estático. Esta definición del problema acota el marco de trabajo, es decir, se está planteando el diseño de un sistema que sea capaz de devolver una etiqueta asignada, ante un vector de características extraído del defecto. El clasificador estático no depende de las conclusiones de un instante anteriores, sino sólo del vector de entrada.

Otra de las peculiaridades de estos sistemas es la falta de muestras para el diseño de los clasificadores. El coste de obtener las muestras o la escasez de frecuencias de algunos tipos de defectos, hace muchas veces que el universo del problema sea escaso. Por otro lado, si se mantiene en todas las componentes del vector de características igual relación señal ruido, el error de clasificación aumenta con el incremento de la dimensión del espacio. A este efecto se le llama fenómeno Hughes [Hughe68]. Por lo que sugiere buscar una selección de las características determinadas por el número de muestras y por la capacidad de discriminación del clasificador resultante.

Por todo ello, se ha trabajado en el diseño de clasificadores tanto paramétricos como no paramétricos. Los primeros ofrecen la posibilidad de obtener expresiones analíticas tanto del error como del sesgo, así como facilitan la introducción de conocimiento a priori. Gran parte de este capítulo se orienta a estos clasificadores (6.1). Se empieza por un planteamiento general de los clasificadores paramétricos, de los que se



tratan de obtener las ecuaciones tanto de los parámetros para su diseño como de los resultados obtenidos, expresándose éstos en términos de error de clasificación.

Seguidamente se presenta un novedoso método de parametrización - selección de las características basada en las transformaciones Box Cox y en las distancias de Bhattacharyya (6.3). El algoritmo considera el número de muestras que se tiene de las poblaciones enfrentadas.

Dentro de los clasificadores no paramétricos y enmarcado en el contexto de clasificadores lineales y cuadráticos, se estudia y se propone una modificación de los algoritmos de aprendizaje LVQ, pasando de la distancia euclídea a la Mahalanobis (6.4).

Por último, la plausibilidad de lo propuesto ha sido demostrada en el trabajo experimental para la detección de defectos locales en el aluminio colado (6.5), donde se comparan los resultados obtenidos con otras técnicas tradicionales de clasificación.

## 6.1 Clasificadores paramétricos

---

Los clasificadores paramétricos se muestran como los clasificadores óptimos, al minimizar la probabilidad de error [Fukun90]. Sin embargo, requieren del conocimiento de la función de densidad de la señal de entrada,  $p(X)$ , y en la mayoría de las aplicaciones, las funciones son estimadas por un número finito de observaciones, que en general resultan insuficientes.

Aún en el caso de conocer la función de densidad, la implementación suele ser difícil por falta de metodología. No obstante, el objetivo de parametrizar el espacio encamina tanto a facilitar la introducción de conocimiento a priori como a la selección de las características. La primera por tener la intención de buscar las transformaciones Box Cox que permitan modelar las funciones de distribución condicionales como funciones normales, y la segunda por conocer el error de clasificación mediante expresiones analíticas.

Desde el punto de vista de Bayes, el mejor clasificador que minimice el error será aquel que cumpla

$$p(\omega_k)p(X|\omega_k) = \max_i (p(\omega_i)p(X|\omega_i)) \rightarrow X \in \omega_k \quad (6.1)$$

donde  $p(\omega_k)$  es la probabilidad de *cluster*  $\omega_k$  y  $p(X|\omega_k)$  es la probabilidad condicionada de que  $X$  pertenezca a  $\omega_k$ . Si la distribución condicional de  $X$  para las  $L$  clases son normales y todos los *cluster* tienen igual probabilidad, ( 6.1 ) será reemplazado por:

$$\min_i \left[ h(X) = \left( \frac{1}{2} (X - M_i)^T \Sigma_i^{-1} (X - M_i) \right) \right] \quad (6.2)$$

siendo  $M_i$  y  $\Sigma_i$  el vector de medias y la matriz de covarianzas respectivamente del *cluster*  $i$ . Nótese que se clasificará según la menor distancia de Mahalanobis de  $X$  a cada una de las clases. La ecuación ( 6.2 ) constituye un clasificador a tramos con fronteras cuadráticas. En el caso de tener todas las matrices de covarianza idénticas,  $X^T \Sigma_i^{-1} X$  de ( 6.2 ) serían comunes entre todas las clases, y la expresión se reduciría a

$$\min_i \left[ h(X) = - \left( M_i^T \Sigma^{-1} X - \frac{1}{2} M_i^T \Sigma^{-1} M_i \right) \right] \quad (6.3)$$

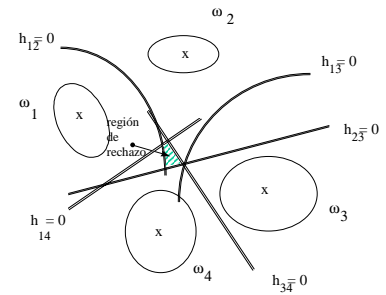
donde  $\Sigma$  es la matriz de covarianza común.  $X$  es clasificada a la clase de mayor correlación entre  $X$  y  $M_i \Sigma^{-1}$ . En general, las matrices de covarianza no son iguales, pero los clasificadores lineales son más robustos que los cuadráticos, como se expondrá en este capítulo. Para estos casos,  $\Sigma$  es reemplazado por la media de las covarianzas.

Sea como fuere, habrán  $h(X)$ , cuadráticos o lineales, capaces de separar entre sí las múltiples clases que existieran. Asumiendo que la región en cada clase sea convexa, como muestra la Figura 6.1, la región de la clase  $i$  puede ser especificada por

$$h_{i1}(X) < 0, \dots, h_{iL}(X) < 0 \rightarrow X \in \omega_i \quad [h_{ii} \text{ es excluida}] \quad (6.4)$$

como se evidencia de la Figura 6.1, las  $L$  regiones dadas por ( 6.4 ) no necesariamente cubren todo el espacio. Cuando una muestra cae en esta región, el clasificador no podrá decidir. A esta zona se le llama región de rechazo.

La implementación ( 6.4 ) consistirá en  $(L-1)$  funciones discriminantes y una puerta AND con  $L-1$  entradas de signo  $h_{ij}$ , como muestra la Figura 6.2. Cuando la suposición de convexidad no se cumple, habrá de reemplazar la puerta AND por una estructura lógica más complicada. Consecuentemente, el clasificador llega a ser demasiado complicado para poder ser práctico. Por lo tanto, sólo se limitará el



**Figura 6.1 Clasificadores a tramos**

diseño en las siguientes discusiones a regiones convexas.

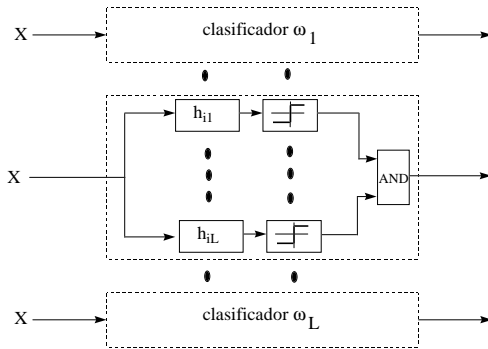
De otro lado, la probabilidad de error de cada clase,  $\varepsilon_i$ , puede ser expresada en términos de probabilidad de rechazo,  $p_r$ , quedando

$$\varepsilon_i = 1 - p_r(h_{i1}(X) > 0, \dots, h_{iL}(X) > 0 | X \in \omega_i) = 1 - \int_0^\infty \dots \int_0^\infty p(h_{i1}(X), \dots, h_{iL}(X) | \omega_i) dh_{i1} \dots dh_{iL} \quad [h_{ii} \text{ es excluido}] \quad (6.5)$$

el error total es

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^L p(\omega_i) \varepsilon_i \quad (6.6)$$

Conociendo la estructura del clasificador a tramos, el problema consiste en diseñar  $h_{ij}(X)$  para cada una de las  $L$  clases. Debido a la complejidad del problema la solución no es clara. Tres filosofías distintas pueden ser apuntadas :



1. Encontrar el óptimo de  $h_{ij}(X)$  mediante la minimización del error cuadrático medio entre la salida deseada y el valor obtenido. Desafortunadamente, incluso para clasificadores lineales a tramos, no hay demostración de convergencia. Método muy utilizado en métodos no paramétricos.

2. Ajustar los parámetros de  $h_{ij}(X)$

**Figura 6.2 Implementación del clasificador**

tal que minimice  $\varepsilon$  de ( 6.6 ). La dificultad de obtener una solución explícita del error sobre los parámetros de  $h(X)$ , hace necesario recurrir al cálculo numérico. Incluso para distribuciones normales la solución no es fácil. Este proceder será utilizado para el diseño de  $h(X)$ , lineales o cuadráticos, con enfrentamiento entre dos grupos.

3.Diseño de clasificadores tomados a pares, utilizando las técnicas tradicionales que serán expuestas a continuación en el apartado 6.1.1.  $\binom{L}{2}$  funciones discriminantes serán calculadas para cada región y posteriormente se determinará la clasificación mediante ( 6.4 ). Las regiones vendrán definidas por la etapa de *clustering* paramétrico, basadas en las exposiciones del anterior capítulo y en las que se va a ver seguidamente para la decantación definitiva del *cluster*.

A continuación se expone la teoría del diseño de clasificadores paramétricos tomados en grupos de dos. Se desarrollan los conceptos básicos para determinar en primer lugar, la expresión de error para clasificadores cuadráticos y lineales cuando las funciones de distribución son normales, párrafo 6.1.2, en segundo lugar, se estudian los criterios para el diseño de los clasificadores cuadráticos y lineales (6.1.3). Para continuar seguidamente con la influencia del número de muestras en el diseño de los clasificadores.

### 6.1.1 Clasificación a dos grupos

Una vez modelizado el espacio entre dos grupos, se asumen conocidas las funciones de densidad condicionadas,  $p(X|\omega_1)$  y  $p(X|\omega_2)$ , así como las probabilidades de los clusters,  $p(\omega_1)$  y  $p(\omega_2)$ . Una regla de decisión basada en la distribución de la variable será :

$$p(\omega_1)p(X|\omega_1) \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{>}} p(\omega_2)p(X|\omega_2)$$

$$\ell(X) = \frac{p(X|\omega_1)}{p(X|\omega_2)} \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{>}} \frac{p(\omega_2)}{p(\omega_1)} \quad ( 6.7 )$$

el término  $\ell(X)$  es llamado ratio de verosimilitud, donde  $p(\omega_2)/p(\omega_1)$  es el valor umbral para la decisión. Algunas veces es más conveniente escribirlo a modo de regla de decisión:

$$h(X) = -\ln \ell(X) = -\ln p(X|\omega_1) + \ln p(X|\omega_2) \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{>}} \ln \frac{p(\omega_1)}{p(\omega_2)} \quad ( 6.8 )$$

a  $h(X)$  se le llama función discriminante. En general, la regla de decisión de ( 6.8 ), o cualquier otra forma de clasificación, no es perfecta. Con esta finalidad, las prestaciones de la norma de decisión son calculadas a partir del error de clasificación, esto es, la probabilidad de que una muestra sea asignada a una clase errónea.

El error condicional,  $r(X)$ , debido a la regla de ( 6.7 ), hará corresponder el error al valor más pequeño de  $p(\omega_1) p(X|\omega_1)$  o  $p(\omega_2) p(X|\omega_2)$ , esto es :

$$r(X) = \min[p(\omega_1)p(X|\omega_1), p(\omega_2)p(X|\omega_2)] \quad (6.9)$$

el error total o error de Bayes será:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= E\{r(X)\} = \int_X r(X)p(X)dX = \int_X \min[p(\omega_1)p(X|\omega_1), p(\omega_2)p(X|\omega_2)]dX \\ &= p(\omega_1) \int_{L_2} p(X|\omega_1)dX + p(\omega_2) \int_{L_1} p(X|\omega_2)dX \end{aligned} \quad (6.10)$$

$L_1$  y  $L_2$  son las regiones donde  $X$  es clasificado a  $\omega_1$  o a  $\omega_2$ , respectivamente. En  $L_1$ ,  $p(\omega_1) p(X|\omega_1)$  es mayor a  $p(\omega_2) p(X|\omega_2)$ , y por tanto  $r(X) = p(\omega_2) p(X|\omega_2)$ . En caso contrario,  $r(X) = p(\omega_1) p(X|\omega_1)$  en  $L_2$  donde  $p(\omega_1) p(X|\omega_1) < p(\omega_2) p(X|\omega_2)$ . Distinguiéndose dos tipos de error, uno resultado de la mala clasificación desde  $\omega_1$  y el otro desde  $\omega_2$ . El error total es la suma de los dos anteriores.

El cálculo del error de Bayes es complicado de determinar. La mayor dificultad viene dada por la integración en elevadas dimensiones, al no ser fácil la limitación de las regiones, incluso aun cuando las observaciones sigan una distribución normal. Por lo tanto, suele ser más conveniente integrar la función de densidad de  $h(X)$  de ( 6.8 ), la cual es unidimensional:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \int_{\ln(p(\omega_1)/p(\omega_2))}^{+\infty} p_h(h|\omega_1)dh \\ \varepsilon_2 &= \int_{-\infty}^{\ln(p(\omega_1)/p(\omega_2))} p_h(h|\omega_2)dh \end{aligned} \quad (6.11)$$

donde  $p_h(h|\omega_i)$  es la densidad condicional de  $h$  para  $\omega_i$ . Sin embargo, en general, la función de densidad de  $h$  no suele estar disponible, y tiene dificultades de computación.

### 6.1.2 Expresión general del error para la clasificación de dos grupos

Desde un punto de vista general, si el clasificador tiene una función discriminante para dos grupos, y modificando ( 6.8 ) para colocarla de la forma :

$$h(X) \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{>}} 0 \quad (6.12)$$

el error del grupo 1 salvo una constante, será :

$$\varepsilon_1 = \int_{h(X)>0} p(X | \omega_1) dX = \int_X u(h(X)) p(X | \omega_1) dX \quad (6.13)$$

siendo  $u(\cdot)$  la función escalón. Utilizando la transformada de Fourier para una función escalón :

$$F(u) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (6.14)$$

e insertando la antitransformada del escalón

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\omega, X} \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{j\omega h(X)} p(X | \omega_1) d\omega dX \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \iint_{\omega, X} \frac{e^{j\omega h(X)}}{j\omega} p(X | \omega_1) d\omega dX \end{aligned} \quad (6.15)$$

De la misma forma para el grupo 2, quedando :

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \int_{h(X)<0} p(X | \omega_2) dX = \int_X F(-h(X)) p(X | \omega_2) dX \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\omega, X} \left[ \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega} \right] e^{j\omega h(X)} p(X | \omega_2) d\omega dX \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \iint_{\omega, X} \frac{e^{j\omega h(X)}}{j\omega} p(X | \omega_1) d\omega dX \end{aligned} \quad (6.16)$$

el error total será :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= p(\omega_1)\varepsilon_1 + p(\omega_2)\varepsilon_2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \iint_{\omega, X} \frac{e^{j\omega h(X)}}{j\omega} \tilde{p}(X) d\omega dX \end{aligned} \quad (6.17)$$

donde :

$$\tilde{p}(X) = p(\omega_1)p(X|\omega_1) - p(\omega_2)p(X|\omega_2) \quad (6.18)$$

expresión ( 6.17 ) deducida al ser  $p(\omega_1) + p(\omega_2)$  la unidad. Se observa que el error es una función de  $h(X)$  y de  $\tilde{p}(X)$ , especificando el tipo de clasificador y la distribución de las variables, respectivamente.

Otra interpretación del error puede ser dada desde la función característica,  $F_i(\omega)$ . Ésta se define como :

$$F_i(\omega) = E\{e^{j\omega h(X)}|\omega_i\} = \int_X e^{j\omega h(X)} p(X|\omega_i) dX = \int_h e^{j\omega h} p(h|\omega_i) dh \quad (6.19)$$

esto es,  $F_i(\omega)$  puede ser obtenida o bien mediante la integración n-dimensional de  $X$ , o a través de la integral unidimensional de  $h$ . Obsérvese que  $F_i(\omega)$  representa la transformada de Fourier, excepto por el signo de  $j\omega$ . Si se aplica el concepto de antitransformada,

$$p(h|\omega_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} F_i(\omega) e^{-j\omega h} d\omega \quad (6.20)$$

o

$$p(-h|\omega_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} F_i(\omega) e^{j\omega h} d\omega \quad (6.21)$$

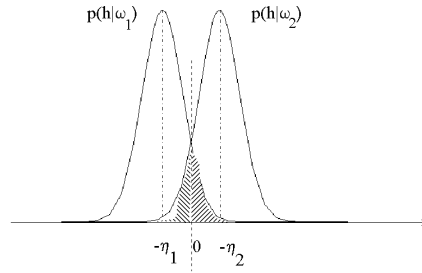
esta última expresión indica que  $F_i(\omega)$  es la transformada de Fourier de  $p(-h|\omega_i)$ . Volviendo al error y partiendo de ( 6.15 ), la multiplicación de la función característica por  $\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right]$  en el dominio de Fourier, corresponderá con el error de tipo 1, esto es con el valor de  $\varepsilon_1$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{2\pi} \int \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] F_1(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] F_1(\omega) e^{j\omega h} d\omega|_{h=0} = \\ &= \int_{-\infty}^0 p(-h|\omega_1) dh = \int_0^{\infty} p(h|\omega_1) dh \end{aligned} \quad (6.22)$$

de la misma manera para  $\varepsilon_2$ , la multiplicación de la función característica por  $\left[\pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}\right]$  en el dominio de Fourier, corresponde:

$$\varepsilon_2 = \int_0^{+\infty} p(-h|\omega_2)dh = \int_{-\infty}^0 p(h|\omega_2)dh \quad (6.23)$$

Estas dos últimas ecuaciones son ilustradas en la figura 6.3, donde se muestra como los errores corresponden con las áreas ocupadas desde el umbral hasta el  $\pm\infty$  según sea  $p(h|\omega_i)$ .



**Figura 6.3 Error de clasificación**

El procedimiento para calcular el error de un clasificador será :

1. Calcular la función característica,  $F_i(\omega)$ , mediante la integración n-dimensional. Para clasificadores lineales y cuadráticos con distribuciones normales, una expresión explícita puede ser obtenida, estas expresiones van a ser a continuación estudiadas.

2. Aplicar ( 6.15 ) y ( 6.16 ) introduciendo  $F_i(\omega)$ . Al ser las partes reales e imaginarias de  $F_i(\omega)$  pares e impares, el error queda

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_i(\omega)}{j\omega} d\omega = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{IM[F_i(\omega)]}{\omega} d\omega = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{|F_i(\omega)|}{\omega} \sin(\angle F_i(\omega)) d\omega \quad (6.24)$$

donde + y - corresponde para la clase  $i = 1$  o  $2$ .

### 6.1.2.1 Error de clasificación para distribuciones normales

Como ha sido mencionado, existen expresiones explícitas para el error de clasificadores lineales y cuadráticos cuando las poblaciones de enfrentamiento siguen distribuciones normales. Por ser éstas las que van a ser decantadas del proceso de *clustering* paramétrico, se estudia a continuación las funciones características,  $F_i(\omega)$ , tanto para clasificadores cuadráticos como lineales.



6.1.2.1.1 Función característica  $F_i(\omega)$  para clasificador cuadrático

En el caso de utilizar un clasificador cuadrático,  $h(X)$  será del tipo :

$$h(X) = \frac{1}{2}(X - M_1)^T \Sigma_1^{-1}(X - M_1) - \frac{1}{2}(X - M_2)^T \Sigma_2^{-1}(X - M_2) + \frac{1}{2} \ln \frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_2|} - \ln \frac{p(\omega_1)}{p(\omega_2)} \quad (6.25)$$

y

$$p_T(X|\omega_T) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma_T|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2}(X - M)^T \Sigma_T^{-1}(X - M) \right] \quad (6.26)$$

siendo T uno o dos. Si en ( 6.25 ) es aplicado simultáneamente una diagonalización y un desplazamiento , esto es, una transformación blanqueante [Fukun90],  $Y=A^T(X-M_T)$ ,

$$A^T \Sigma_T A = I \quad A^T (\Sigma_1^{-1} - \Sigma_2^{-1}) A = \mu \quad (6.27)$$

luego,  $M_i$  y  $\Sigma_i$  son convertidas a :

$$A^T (M_i - M_T) = D_i \quad A^T \Sigma_i A = K_i \quad i = 1,2 \quad (6.28)$$

por lo tanto, en el Y-espacio transformado quedará :

$$h(Y) = \frac{1}{2} Y^T \mu^{-1} Y - V^T Y + c \quad (6.29)$$

$$p_T(Y|\omega_T) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} Y^T Y \right] \quad (6.30)$$

donde

$$V = K_1^{-1} D_1 - K_2^{-1} D_2 \quad (6.31)$$

$$c = \frac{1}{2} (D_1^T K_1^{-1} D_1 - D_2^T K_2^{-1} D_2) + \frac{1}{2} \ln \frac{|K_1|}{|K_2|} - \ln \frac{p(\omega_1)}{p(\omega_2)} \quad (6.32)$$

La función característica  $F_T(\omega)$  es entonces calculada como :

$$\begin{aligned} F_T(\omega) &= \int e^{j\omega h(Y)} p(Y | \omega_T) dY \\ &= \int \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} Y^T (I - j\omega \mu^{-1}) Y - j\omega V^T Y \right] \exp[j\omega c] dY \\ &= \int \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \exp \left[ -\frac{1}{2} (1 - j\omega / \mu_i) \left( y_i + \frac{j\omega v_i}{1 - j\omega / \mu_i} \right)^2 \right] \\ &\quad \prod_{i=1}^n \left( \exp \left[ -\frac{\omega^2 v_i^2}{2(1 - j\omega / \mu_i)} \right] \right) \exp[j\omega c] dY \\ &= \left[ \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 - j\omega / \mu_i}} \exp \left[ -\frac{\omega^2 v_i^2}{2(1 - j\omega / \mu_i)} \right] \right] \exp[j\omega c] \end{aligned} \quad (6.33)$$

donde  $y_i$ ,  $v_i$ ,  $\mu_i$  son las componentes de  $Y$ ,  $V$  y  $\mu$  respectivamente. Obsérvese que en la tercera tautología se tienen  $n$  distribuciones normales  $N_Y \left( \frac{-j\omega v_i}{1 - j\omega / \mu_i}, \frac{1}{1 - j\omega / \mu_i} \right)$ . Dependiendo de si el error es generado por  $h(X) > 0$  o  $h(X) < 0$ , el error de clasificación será computado como:

$$\varepsilon_T = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \begin{cases} \int_0^\infty p(h | \omega_T) dh = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int \frac{F_1(\omega)}{j\omega} d\omega \\ \int_{-\infty}^0 p(h | \omega_T) dh = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \int \frac{F_2(\omega)}{j\omega} d\omega \end{cases} \quad (6.34)$$

La integración de (6.34) debe realizarse de manera numérica. La integración no es simple pero es factible. Esta expresión ha sido utilizada en el cálculo del error de los clasificadores cuadráticos implementados.

Evaluando los resultados para  $\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_1$  y  $\mathbf{\Sigma}_T = \mathbf{\Sigma}_1$ , luego la transformación de diagonalización y desplazamiento quedará :

$$A^T \Sigma_1 A = I \quad A^T \Sigma_2 A = \Lambda \quad A^T (M_2 - M_1) = L \quad (6.35)$$

donde  $(\Sigma_1^{-1} - \Sigma_2^{-1})^{-1}$  es también transformado a matriz diagonal  $\mu$

$$\mu = A^T (\Sigma_1^{-1} - \Sigma_2^{-1})^{-1} A = A^T \left( A(I - \Lambda^{-1})^{-1} A^T \right)^{-1} A = (I - \Lambda^{-1})^{-1} \quad (6.36)$$

al ser  $M_T = M_1$  implica  $D_1 = 0$ ,  $D_2 = L$ ,  $K_1 = I$  y  $K_2 = \Lambda$  desde ( 6.28 ). Insertando éstos en ( 6.31 ) y ( 6.32 ),  $V$  y  $c$  son :

$$V = -\Lambda^{-1} L \quad (6.37)$$

$$c = -\frac{1}{2} L^T \Lambda^{-1} L - \frac{1}{2} \ln|\Lambda| - \ln \frac{p(\omega_1)}{p(\omega_2)} \quad (6.38)$$

para estos casos los valores de  $\mu_i$  y  $v_i$  de ( 6.33 ) corresponderán con

$$\frac{1}{\mu_i} = 1 - \frac{1}{\lambda_i} \quad v_i = -\frac{l_i}{\lambda_i} \quad (6.39)$$

Que introduciendo estos valores en ( 6.34 ) es posible calcular  $\epsilon_1$ . Para el caso de  $M_T = M_2$  y  $\Sigma_T = \Sigma_2$ , después de la primera transformación de ( 6.35 ), otra vez es aplicada una segunda :

$$Y = A^T (X - M_2) \quad Z = \Lambda^{1/2} Y \quad (6.40)$$

quedando ( 6.40 )

$$\Lambda^{-1/2} I \Lambda^{-1/2} = I \quad \Lambda^{-1/2} \Lambda \Lambda^{-1/2} = I \quad \Lambda^{-1/2} A^T (M_1 - M_2) = -\Lambda^{-1/2} L \quad (6.41)$$

dicha transformación garantiza la diagonalización de  $(\Sigma_1^{-1} - \Sigma_2^{-1})^{-1}$

$$\mu = \Lambda^{-1/2} (I - \Lambda^{-1})^{-1} \Lambda^{-1/2} = (\Lambda - I)^{-1} \quad (6.42)$$

al ser  $M_T = M_2$  implica  $D_1 = -\Lambda^{-1/2} L$ ,  $D_2 = 0$ ,  $K_1 = \Lambda^{-1}$  y  $K_2 = \Lambda$  desde ( 6.28 ). Insertando éstos en ( 6.31 ) y ( 6.32 ),  $V$  y  $c$  son :

$$V = -\Lambda \Lambda^{-1/2} L = -\Lambda^{1/2} L \quad (6.43)$$

$$c = \frac{1}{2} L^T \Lambda^{-1/2} \Lambda \Lambda^{-1/2} L - \frac{1}{2} \ln|\Lambda| - \ln \frac{p(\omega_1)}{p(\omega_2)} = \frac{1}{2} L^T L - \frac{1}{2} \ln|\Lambda| - \ln \frac{p(\omega_1)}{p(\omega_2)} \quad (6.44)$$

Esto es, después de calcular  $\Lambda$  y  $L$ , son obtenidos los valores de  $\mu_i$ ,  $v_i$  y  $c$  de ( 6.34 ) a partir de ( 6.42 ), ( 6.43 ) y ( 6.44 ).

Este método de calcular el error ha sido empleado en los clasificadores paramétricos utilizados para la catalogación de las faltas visuales del aluminio. Las pruebas realizadas serán comentadas en el apartado 6.5

#### 6.1.2.1.2 Función característica $F_i(\omega)$ para clasificador lineal

Para el caso de clasificador lineal, y eligiendo el criterio de Fisher,  $h(X)$  será :

$$h(X) = (M_2 - M_1)^T \bar{\Sigma}^{-1} X + \frac{1}{2} (M_1^T \bar{\Sigma}^{-1} M_1 - M_2^T \bar{\Sigma}^{-1} M_2) \quad ( 6.45 )$$

donde  $\bar{\Sigma} = \left( \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{2} \right)$ , además los dos grupos siguen distribuciones normales.

Utilizando similar procedimiento que en los clasificadores cuadráticos, es aplicado diagonalización y desplazamiento,  $Y = A^T(X - M_T)$ ,

$$A^T \Sigma_T A = I \quad A^T (\Sigma_1 + \Sigma_2) A = \mu \quad ( 6.46 )$$

definiendo  $D_i$  como:

$$A^T (M_i - M_T) = D_i \quad i = 1, 2 \quad ( 6.47 )$$

por lo tanto, en el  $Y$ -espacio quedará :

$$h(Y) = V^T Y + c \quad ( 6.48 )$$

$$p_T(Y | \omega_T) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} Y^T Y \right] \quad ( 6.49 )$$

donde

$$V = \mu^{-1} (D_2 - D_1) \quad ( 6.50 )$$

$$c = \frac{1}{2} (D_1^T \mu^{-1} D_1 - D_2^T \mu^{-1} D_2) \quad (6.51)$$

La función característica  $F_T(\omega)$  será calculada como :

$$\begin{aligned} F_T(\omega) &= \int e^{j\omega h(Y)} p(Y | \omega_T) dY \\ &= \int \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} Y^T Y + j\omega V^T Y \right] \exp[j\omega c] dY \\ &= \int \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \exp \left[ -\frac{1}{2} (y_i - j\omega v_i)^2 \right] \\ &\quad \prod_{i=1}^n \left( \exp \left[ -\frac{\omega^2 v_i^2}{2} \right] \right) \exp[j\omega c] dY \\ &= \exp \left[ -\frac{\omega^2}{2} V^T V + j\omega c \right] \end{aligned} \quad (6.52)$$

Evalutando los resultados para  $\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_1$  y  $\Sigma_T = \Sigma$ , luego la transformación de diagonalización y desplazamiento quedará :

$$A^T \Sigma_1 A = I \quad A^T \Sigma_2 A = \Lambda \quad (6.53)$$

además  $\mu$  es también transformado a matriz diagonal

$$\mu = \frac{1}{2} A^T (\Sigma_1 + \Sigma_2) A = \frac{1}{2} (I + \Lambda) \quad (6.54)$$

junto con  $D_1 = 0$ ,  $D_2 = A^T (M_2 - M_1)$  al que se asignará a  $L$ , introduciéndolo en las expresiones ( 6.50 ) y ( 6.51 ),  $V$  y  $c$  son :

$$V = \left( \frac{I + \Lambda}{2} \right)^{-1} L \quad (6.55)$$

$$c = -\frac{1}{2} L^T \left( \frac{I + \Lambda}{2} \right)^{-1} L \quad (6.56)$$

Si se hace  $\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_2$  y  $\Sigma_T = \Sigma_2$ , después de la primera transformación de ( 6.53 ), otra vez es aplicada una segunda :

$$Y = A^T(X - M_2) \quad Z = \Lambda^{1/2}Y \quad (6.57)$$

resultando

$$\Lambda^{-1/2}I\Lambda^{-1/2} = \Lambda \quad \Lambda^{-1/2}\Lambda\Lambda^{-1/2} = I \quad \Lambda^{-1/2}A^T(M_1 - M_2) = -\Lambda^{-1/2}L \quad (6.58)$$

dicha transformación garantiza la diagonalización de  $(\Sigma_1 + \Sigma_2)$

$$\mu = \Lambda^{-1/2}\left(\frac{I + \Lambda}{2}\right)\Lambda^{-1/2} = \frac{\Lambda^{-1} + I}{2} \quad (6.59)$$

al ser  $M_T = M_2$  implica  $D_1 = -\Lambda^{-1/2}L$ ,  $D_2 = 0$ . Insertando éstos,  $V$  y  $c$  son :

$$V = \left(\frac{\Lambda^{-1} + I}{2}\right)^{-1} \Lambda^{-1/2}L \quad (6.60)$$

$$c = \frac{1}{2}L^T\Lambda^{-1/2}\left(\frac{\Lambda^{-1} + I}{2}\right)^{-1} \Lambda^{-1/2}L \quad (6.61)$$

Al igual que en los clasificadores cuadráticos, también se a empleado este método para determinar el error de los clasificadores lineales diseñados para los defectos visuales del aluminio (ver 6.5).

### 6.1.2.2 Límites del error de Bayes

Es evidente tal como se está planteando, que el cálculo de la probabilidad de error, en general, es una tarea difícil. Incluso cuando la observación de las muestras siga una distribución normal, hay que recurrir a métodos numéricos. Sin embargo, existen varias propuestas de expresiones que se acercan al valor del error. No sólo se reduce el gran esfuerzo de carga computacional, sino más importante todavía, el uso de estas aproximaciones permite conocer los mecanismos que causan el error. Como se verá en párrafos siguientes, estas expresiones serán utilizadas en el problema de la selección de las óptimas características y en el tipo de clasificador paramétrico a utilizar.

Las aproximaciones al error pueden ser realizadas por el límite superior o por el límite inferior. En la bibliografía especializada existen múltiples propuestas tanto hacia la arriba como hacia abajo. Seguidamente, se exponen algunas de ellas.

#### 6.1.2.2.1 Límite superior de Chernoff y Bhattacharyya

El error de Bayes fue dado en ( 6.10 ) y puede ponerse de la forma :

$$\varepsilon = \int_X \min[p(\omega_1)p(X|\omega_1), p(\omega_2)p(X|\omega_2)]dX \quad (6.62)$$

un límite superior de la integración podría ser obtenido considerando que :

$$\begin{aligned} \min[a,b] &\leq a^s b^{1-s} & 0 \leq s \leq 1 \\ a, b &\geq 0 \end{aligned} \quad (6.63)$$

dicha ecuación muestra que la media geométrica de dos valores positivos es mayor que la menor de éstas. Si  $a < b$ , la expresión de la izquierda de ( 6.63 ) es  $a$ , mientras el lado derecho puede ser escrito como  $a(b/a)^{1-s}$ . Al ser  $b/a > 1$  y  $1-s \geq 0$ , el margen derecho será mayor que el izquierdo. Viceversa, si  $a > b$  y reescribiendo  $b(a/b)^s$ , está claro que el lado derecho es mayor que el izquierdo al ser  $(a/b)^s \geq 1$ . Aplicando ( 6.63 ) en ( 6.62 ) el límite superior del error será :

$$\varepsilon_u = p(\omega_1)^s p(\omega_2)^{1-s} \int_X p(X|\omega_1)^s p(X|\omega_2)^{1-s} dX \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (6.64)$$

este límite superior del error,  $\varepsilon_u$ , es llamado límite de Chernoff [Chern52]. El óptimo de  $s$  se encontrará minimizando  $\varepsilon_u$ .

Cuando dos funciones de densidad son normales,  $N_X(M_1, \Sigma_1)$  y  $N_X(M_2, \Sigma_2)$ , la integral de ( 6.64 ) puede ser expresada como :

$$\int_X p(X|\omega_1)^s p(X|\omega_2)^{1-s} dX = e^{-\mu(s)} \quad (6.65)$$

donde

$$\begin{aligned} \mu(s) = & \frac{s(1-s)}{2} (M_2 - M_1)^T [s\Sigma_1 + (1-s)\Sigma_2]^{-1} (M_2 - M_1) \\ & + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{|s\Sigma_1 + (1-s)\Sigma_2|}{|\Sigma_1|^s |\Sigma_2|^{1-s}} \right) \end{aligned} \quad (6.66)$$

Esta expresión de  $\mu(s)$  es llamada distancia de Chernoff. El óptimo de  $s$  puede ser obtenido mediante la representación de  $\mu(s)$ , para cada par de grupos enfrentados. El valor buscado será el máximo de  $\mu(s)$ .

En el caso de no localizar el óptimo de  $s$ , se simplifica la localización del límite superior. Una de las posibilidades es seleccionar  $s = 1/2$ . Luego, el límite superior es :

$$\mu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} (M_2 - M_1)^T \left[ \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{2} \right]^{-1} (M_2 - M_1) + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\left| \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{2} \right|}{\sqrt{|\Sigma_1| |\Sigma_2|}} \right) \quad (6.67)$$

el término  $\mu(1/2)$  es llamado la distancia de Bhattacharyya [Bhatt43]. Ésta corresponde con el óptimo de la distancia de Chernoff cuando  $\Sigma_1 = \Sigma_2$ . Aplicándolo en la expresión (6.66)

$$\mu(s) = \frac{s(1-s)}{2} (M_2 - M_1)^T \Sigma^{-1} (M_2 - M_1) \quad (6.68)$$

siendo  $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ . El óptimo de  $s$  resultará ser :

$$\frac{d\mu(s)}{ds} = \frac{1-2s}{2} (M_2 - M_1)^T \Sigma^{-1} (M_2 - M_1) = 0 \quad (6.69)$$

la solución es  $s = 1/2$ .

De la expresión de (6.67) se desprende que la distancia de Bhattacharyya contiene dos términos,  $\mu_1$  y  $\mu_2$ . El primer valor mide la separación de las clases debido a la diferencia entre las medias, mientras el segundo muestra la diferencia debido a las matrices de covarianza.

#### 6.1.2.2.2 Otros límites

Si bien hay otros límites que resultan ser mejores que los de Bhattacharyya y Chernoff, como por ejemplo el de *Hadar et al* [Hadar96], pues éstos se aproximan más al verdadero error, tienen el gran inconveniente de no tener una expresión analítica para distribuciones normales, lo que posteriormente dificultará el tratamiento de estimación del sesgo y la varianza al considerar un número limitado de muestras.

### 6.1.3 Diseño de clasificadores lineales óptimos

Los clasificadores lineales son los más fáciles de implementar y están directamente relacionados con muchas técnicas conocidas, tales como correlación o la distancia euclídea. Sin embargo, desde el punto de vista de Bayes, los clasificadores lineales son óptimos sólo para distribuciones normales con matrices de covarianza iguales. En algunas aplicaciones como la detección de señales en sistemas de comunicación, la suposición de matrices iguales son razonables, ya que el ruido no afecta de manera considerable de una señal a otra. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones de Reconocimiento de Formas, no es posible aceptar la igualdad de matrices de covarianza.



Ha habido mucho esfuerzo en el diseño del mejor clasificador lineal para distribuciones normales con desiguales covarianzas y distribuciones no normales. Naturalmente, éstas no son óptimas, pero en muchos casos la simplicidad y robustez de los clasificadores lineales compensan las pérdidas de prestaciones.

La regla de clasificación de éstos seguirán la expresión :

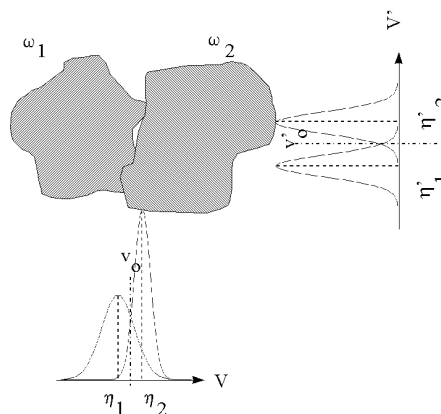
$$h(X) = V^T X + v_0 \begin{matrix} \omega_1 \\ > \\ \omega_2 \\ < \end{matrix} 0 \quad ( 6.70 )$$

el término  $h(X)$  es una función lineal de  $X$ , llamada función discriminante lineal. El diseño del clasificador tratará de buscar los óptimos coeficientes de  $V$  y el umbral  $v_0$  para la distribución dada.

Es de observar que estos clasificadores funcionan bien, si la separabilidad entre clases viene dada por la diferencia entre las medias de los *clusters*. Mientras que los clasificadores no lineales mantienen buenos resultados cuando la separación es debida a la diferencia entre las covarianzas. Así, en los términos  $\mu_1$  y  $\mu_2$  de Bhattacharyya indican la naturaleza de separación entre las dos clases. Cuando  $\mu_1$  es predominante en la distancia, indica la necesidad de construir clasificadores lineales. En caso contrario, se tenderá al diseño de clasificadores no lineales, especialmente cuadráticos.

### 6.1.3.1 Procedimiento de diseño óptimo

La expresión ( 6.70 ) muestra la proyección del vector  $X$  sobre el espacio unidimensional  $h(X)$ . Si  $X$  sigue una distribución normal,  $h(X)$  también la seguirá. En la figura 6.4 se muestra la proyección de las poblaciones sobre los vectores  $V$  y  $V'$ , donde  $v_0$



**Figura 6.4 Representación de clasificadores lineales sobre dos proyecciones distintas**

y  $v'_0$  son los umbrales de separación entre  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Como se puede ver, el error es más

pequeño en  $V'$  que en  $V$ . El diseño óptimo vendrá en la relación de  $V$  y  $v_0$  que minimice el error en el  $h$ -espacio. Con este objetivo será necesario modelar la distribución de  $\omega_1$  y  $\omega_2$  proyectado en  $h$ -espacio, teniendo que definir  $\eta_i = E\{h(X)|\omega_i\}$  y  $\sigma_i^2 = \text{Var}\{h(X)|\omega_i\}$ , las cuales son función de  $V$  y  $v_0$ . Incluso, si  $X$  no se distribuye normalmente,  $h(X)$  pudiera acercarse a normal cuando la dimensión del espacio de  $X$ ,  $n$ , tienda a ser elevada. En este caso,  $h(X)$  es la suma de  $n$  términos aleatorios y por el consiguiente teorema central del límite,  $h(X)$  tenderá a seguir una distribución normal.

Los valores esperados y la varianza de  $h(X)$  son :

$$\eta_i = E\{h(X)|\omega_i\} = V^T E\{X|\omega_i\} + v_0 = V^T M_i + v_0 \quad (6.71)$$

$$\sigma_i^2 = \text{Var}\{h(X)|\omega_i\} = V^T E\{(X - M_i)(X - M_i)^T|\omega_i\}V = V^T \Sigma_i V \quad (6.72)$$

considerando la función  $f(\eta_1, \eta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$ , la cual maximiza o minimiza algún criterio (por ejemplo, la distancia entre clases), esta medida permitirá determinar el óptimo de  $V$  y  $v_0$ . Luego, las derivadas de  $f$  respecto a  $V$  y  $v_0$  son :

$$\frac{\partial f}{\partial V} = \frac{\partial f}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial V} + \frac{\partial f}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial V} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_1^2} \frac{\partial \sigma_1^2}{\partial V} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2^2} \frac{\partial \sigma_2^2}{\partial V} \quad (6.73)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v_0} = \frac{\partial f}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial v_0} + \frac{\partial f}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial v_0} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_1^2} \frac{\partial \sigma_1^2}{\partial v_0} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2^2} \frac{\partial \sigma_2^2}{\partial v_0} \quad (6.74)$$

tomando las expresiones ( 6.71 ) y ( 6.72 ), se deduce las siguientes derivadas parciales :

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial V} = M_i \quad \frac{\partial \sigma_i^2}{\partial V} = 2\Sigma_i V \quad (6.75)$$

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial v_0} = 1 \quad \frac{\partial \sigma_i^2}{\partial v_0} = 0 \quad (6.76)$$

introduciendo los resultados de ( 6.75 ) y ( 6.76 ), además de igualar a cero las expresiones ( 6.73 ) y ( 6.74 ), quedará :

$$2 \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma_1^2} \Sigma_1 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2^2} \Sigma_2 \right] V = - \left[ \frac{\partial f}{\partial \eta_1} M_1 + \frac{\partial f}{\partial \eta_2} M_2 \right] \quad (6.77)$$

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial \eta_1} + \frac{\partial f}{\partial \eta_2} \right] = 0 \quad (6.78)$$

al aplicar ( 6.78 ) sobre ( 6.77 ), el óptimo de V puede ser calculado. Atendiendo a la reflexión utilizada, el error no depende del tamaño de V sino de su dirección, por tanto, eliminando las constantes quedará :

$$V = [s\Sigma_1 + (1-s)\Sigma_2]^{-1} (M_2 - M_1) \quad (6.79)$$

donde

$$s = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_1^2}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_1^2} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2^2}} \quad (6.80)$$

el valor óptimo de V dependerá de la selección de f. Además, una vez elegida la función, el valor óptimo de  $v_0$  se calculará con la solución de ( 6.78 ). El cuadro de abajo muestra los resultados óptimos de V y  $v_0$ , para dos criterios clásicos.

Nombre criterio	Expresión del criterio	V	$v_0$
Fisher	$f = \frac{(\eta_1 - \eta_2)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$	$\left[ \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{2} \right]^{-1} (M_2 - M_1)$	El criterio de Fisher no depende de $v_0$ , ya que la sustracción de $\eta_2$ menos $\eta_1$ elimina a $v_0$ de ( 6.71 )
Medida entre clases	$f = \frac{p(\omega_1)\eta_1 + p(\omega_2)\eta_2}{p(\omega_1)\sigma_1^2 + p(\omega_2)\sigma_2^2}$	$[p(\omega_1)\Sigma_1 + p(\omega_2)\Sigma_2]^{-1} (M_2 - M_1)$	$V^T [p(\omega_1)M_1 + p(\omega_2)M_2]$

### 6.1.3.2 Diseño óptimo para distribuciones normales

Cuando la distribución de  $h(X)$  es normal, se puede diseñar la función criterio, f, tal que minimice el error de Bayes en el h-espacio. El error será función de  $\eta_i$  y  $\sigma_i^2$  según se vio en 6.1.3.1. La definición será :

$$f = \varepsilon = p(\omega_1) \int_{-\eta_1/\sigma_1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi + p(\omega_2) \int_{-\infty}^{-\eta_2/\sigma_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \quad (6.81)$$

para este criterio, las derivadas del error respecto a los parámetros son :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma_1^2} = \frac{-p(\omega_1)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\eta_1/\sigma_1)^2}{2}} \frac{\eta_1}{\sigma_1^3} = \frac{-p(\omega_1)}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(\eta_1/\sigma_1)^2}{2}} \frac{\eta_1}{\sigma_1^2} \quad (6.82)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma_2^2} = \frac{p(\omega_2)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\eta_2/\sigma_2)^2}{2}} \frac{\eta_2}{\sigma_2^3} = \frac{p(\omega_2)}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(\eta_2/\sigma_2)^2}{2}} \frac{\eta_2}{\sigma_2^2} \quad (6.83)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta_1} = \frac{p(\omega_1)}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(\eta_1/\sigma_1)^2}{2}} \quad (6.84)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta_2} = \frac{-p(\omega_2)}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(\eta_2/\sigma_2)^2}{2}} \quad (6.85)$$

Por lo tanto desde ( 6.78 )

$$\frac{p(\omega_1)}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(\eta_1/\sigma_1)^2}{2}} = \frac{-p(\omega_2)}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(\eta_2/\sigma_2)^2}{2}} \quad (6.86)$$

esto es,  $v_0$  debe ser seleccionado tal que las distribuciones de  $h(X)$  sean ambas iguales a cero.

Considerando la igualdad de ( 6.86 ) e introduciendo ( 6.82 ) y ( 6.83 ) en ( 6.80 )

$$s = \frac{\frac{\eta_1}{\sigma_1^2}}{\frac{\eta_1}{\sigma_1^2} + \frac{\eta_2}{\partial \sigma_2^2}} \quad (6.87)$$

y

$$V = [s\Sigma_1 + (1-s)\Sigma_2]^{-1} (M_2 - M_1) \quad (6.88)$$

la localización óptima de  $V$  y  $v_0$  dependerá de ( 6.86 ) y ( 6.88 ), tal que minimice el error de ( 6.81 ). Desafortunadamente, tanto  $\eta_i$  como  $\sigma_i^2$  están intrínsecamente ligadas a  $V$  y  $v_0$ , la solución explícita no es posible. Por lo tanto, debe ser utilizado un proceso iterativo capaz de encontrarlas. Antes de entrar en la discusión del proceso iterativo, es menester obtener la expresión de  $v_0$ . Sustituyendo  $\eta_1$  y  $\eta_2$  de ( 6.87 ) por las expresiones de ( 6.71 ) quedará :

$$v_0 = -\frac{s\sigma_1^2 V^T M_2 + (1-s)\sigma_2^2 V^T M_2}{s\sigma_1^2 + (1-s)\sigma_2^2} \quad (6.89)$$

el proceso iterativo para determinar  $V$  y  $v_0$  es el siguiente :

1. Calcular  $V$  para un determinado valor de  $s$ ,  $V = [s\Sigma_1 + (1-s)\Sigma_2]^{-1}(M_2 - M_1)$ .
2. Obtener  $\sigma_i^2$  de ( 6.72 ),  $v_0$  de ( 6.89 ) y  $\eta_i$  de ( 6.71 ), siguiendo esta secuencia.
3. Calcular el error, según se vio en 6.1.2.1.
4. Variar  $s$  de 0 a 1

Encontrando el mínimo valor de  $\varepsilon$  respecto de  $s$ , el algoritmo buscará el óptimo de  $V$  y  $v_0$ . Obsérvese la validez del método para cualquier tipo de distribución, siempre y cuando la dimensión del vector sea elevada. En efecto, al ser  $h(X)$  distribución normal por aplicación del teorema central del límite permitirá ser aplicada a distribuciones de la variable que no cumpla normalidad. De otro lado, al tratarse de distribuciones normales, es posible calcular el error del punto 3 mediante la distancia de Bhattacharyya.

#### 6.1.4 Diseño de clasificadores cuadrático

Cuando la distribución de  $X$  es normal tanto para  $\omega_1$  como  $\omega_2$ , la función discriminante bayesiana llega a ser de tipo cuadrático

$$\frac{1}{2}(X - M_1)^T \Sigma_1^{-1}(X - M_1) - \frac{1}{2}(X - M_2)^T \Sigma_2^{-1}(X - M_2) + \frac{1}{2} \ln \frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_2|} \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{>}} \ln \frac{p(\omega_1)}{p(\omega_2)} \quad (6.90)$$

incluso para distribuciones no normales, el clasificador trabaja bien en muchas aplicaciones. Conceptualmente, es fácil aceptar que la clasificación se debe a la comparación entre distancias de Mahalanobis a cada uno de los *clusters* con un apropiado umbral.

Sin embargo, es poco conocido el diseño de clasificadores cuadráticos, excepto la estimación de  $M_i$  y  $\Sigma_i$  e insertarlas en ( 6.90 ). Además, estos clasificadores tienen diversas desventajas cuando son diseñados desde un número finito de muestras. Los sesgos de los clasificadores cuadráticos son mayores que los lineales cuando se utilizan pocas muestras en su confección. Este problema será tratado más adelante.

### 6.1.4.1 Procedimientos de diseño

El clasificador cuadrático puede expresarse como :

$$h(X) = X^T Q X + V^T X + v_0 \quad (6.91)$$

donde Q, V y  $v_0$  son la matriz, el vector y el escalar, respectivamente de la función discriminante. Por lo tanto, se optimizaría mediante la función  $f(\eta_1, \eta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$  con respecto a Q, V y  $v_0$ , tal como fue efectuado con el clasificador lineal. No obstante, el número de parámetros,  $[n(n+1)/2] + n + 1$ , es demasiado grande, y  $\sigma_i^2$  es función de momentos de tercer y cuarto orden, no siendo practicable la optimización de  $f(\eta_1, \eta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$ .

### 6.1.4.2 Linealización

Una posible interpretación a ( 6.90 ) es transformar el problema a lineal

$$h(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n v_i x_i + v_0 = \sum_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \alpha_i y_i + \sum_{i=1}^n v_i x_i + v_0 \quad (6.92)$$

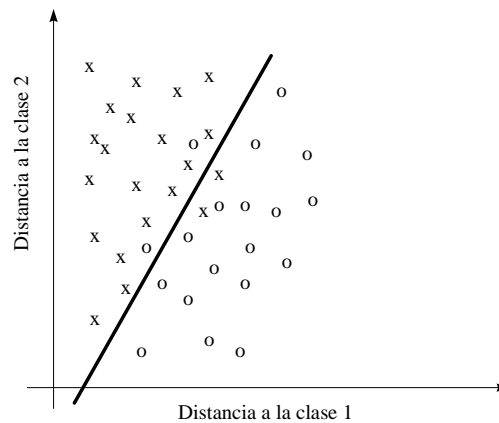
donde  $q_{ij}$  y  $v_i$  son las componentes de Q y V. Cada una de las nuevas variables,  $y_i$ , representa el producto a dos de  $x$ , y  $\alpha$  su correspondiente valor de  $q$ . La ecuación ( 6.92 ) corresponde a una función discriminante lineal, de la que puede aplicarse el procedimiento óptimo de diseño:

$$\left[ \alpha_1, \dots, \alpha_{n(n+1)/2}, v_1, \dots, v_n \right]^T = \left[ sK_1 + (1-s)K_2 \right]^{-1} (D_2 - D_1) \quad (6.93)$$

donde  $D_i$  y  $K_i$  son los vectores esperados y las matrices de covarianza de  $Z = [Y^T X^T]^T$  con  $[n(n+1)/n] + n$  variables. Sin embargo resulta prohibitivo por la cantidad de variables.

### 6.1.4.3 Visualización

Una solución práctica es la representación en un sistema de coordenadas, donde se utilizara la distancia normalizada a cada grupo. Teniendo  $d_1^2 = (X - M_1)^T \Sigma_1^{-1} (X - M_1)$  y  $d_2^2 = (X - M_2)^T \Sigma_2^{-1} (X - M_2)$  en cada eje de coordenadas, la mejor línea recta que los separase podría ser utilizado como elemento de diseño. En la figura se observa dicha técnica



**Figura 6.5 Técnica de diseño de clasificador cuadrático**

El clasificador quedará como

$$d_2^2 = \alpha d_1^2 + \beta \quad ( 6.94 )$$

o bien mediante otro tipo de curva, en general,

$$d_2^2 = f(d_1^2) \quad ( 6.95 )$$

sin embargo, la estructura de la función discriminante debería ser lo más simple posible, ya que si bien es cierto que se adecuaría mejor con las muestras utilizadas, las venideras serán mal clasificadas por falta de generalidad en la solución del problema.

## 6.2 Estimación de los parámetros mediante un conjunto finito de muestras

La parametrización del espacio ha sido realizada mediante los vectores de medias y las matrices de covarianzas. Hasta ahora se ha asumido que los parámetros eran fijos y dados. Desafortunadamente, en la práctica sus valores no son conocidos, y deben ser estimados desde un conjunto de muestras finitas. En Reconocimiento de Formas, suele trabajarse con funciones usando estimaciones de los vectores de medias y matrices de covarianzas, como sucede con las funciones discriminantes, las funciones de densidad o el error de clasificación. Por lo tanto, es menester saber como las salidas de estas funciones son afectadas por las variables aleatorias de los parámetros, más concretamente, sobre el sesgo y la varianza de estas funciones.

### 6.2.1.1 Efecto del tamaño de la muestra en la estimación

Considerando el problema de estimar  $f(y_1, y_2, \dots, y_q)$  por  $f(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_q)$ , donde  $f$  es la función,  $y_i$  sus verdaderos valores, mientras  $\hat{y}_i$  son sus estimaciones. Asumiendo que la desviación entre  $y_i$  e  $\hat{y}_i$  son pequeñas,  $f(\hat{Y})$  puede ser desarrollada por las series de Taylor hasta términos de segundo orden

$$\begin{aligned}\hat{f} = f(\hat{Y}) &\cong f(Y) + \sum_{i=1}^q \frac{\partial f}{\partial y_i} \Delta y_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j} \Delta y_i \Delta y_j = \\ &= f(Y) + \frac{\partial f^T}{\partial Y} \Delta Y + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} \Delta Y \Delta Y^T \right]\end{aligned}\quad (6.96)$$

donde  $\Delta y_i = \hat{y}_i - y_i$  e  $\Delta Y = \hat{Y} - Y$ . Si el estimador carece de sesgo entonces

$$E\{\Delta Y\} = 0 \quad (6.97)$$

y consecuentemente el vector esperado de  $f(\hat{Y})$  será :

$$E\{f(\hat{Y})\} \cong f(Y) + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} E\{\Delta Y \Delta Y^T\} \right] \quad (6.98)$$



Similarmente, la varianza de  $f(\hat{Y})$  será :

$$\begin{aligned} Var\{f(\hat{Y})\} &\equiv E\left\{\frac{\partial f^T}{\partial Y} \Delta Y + \frac{1}{2} tr\left[\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} E\{\Delta Y \Delta Y^T\}\right] - \frac{1}{2} tr\left[\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} E\{\Delta Y \Delta Y^T\}\right]^2\right\} \\ &\equiv E\left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} \Delta Y\right)^2\right\} = \frac{\partial f^T}{\partial Y} E\{\Delta Y \Delta Y^T\} \frac{\partial f}{\partial Y} \end{aligned} \quad (6.99)$$

la ecuación ( 6.98 ) muestra como la estimación del sesgo de la función,  $E\{f(\hat{Y})\}$ , depende de  $\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}$  y de  $E\{\Delta Y \Delta Y^T\}$ , siendo el primer término dependiente de la función, mientras el segundo está supeditado a la distribución de  $\hat{Y}$  junto con el número de muestras utilizado para el cálculo de  $\hat{Y}$ . Igualmente, la varianza depende de  $\frac{\partial f}{\partial Y}$  y  $E\{\Delta Y \Delta Y^T\}$ , y de la misma manera está vinculada al tipo de función junto al tipo de distribución de  $\hat{Y}$ .

En la modelización paramétrica, la mayoría de las funciones a considerar utilizan estimaciones del vector de medias y la matriz de covarianzas. Asumiendo que el origen de los datos corresponde a dos distribuciones normales n-dimensionales, y dadas sus medias y matrices de covarianzas,  $M_1, M_2, \Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ .. Los parámetros  $M_i$  y  $\Sigma_i$  son estimados sin sesgo mediante verosimilitud :

$$\hat{M}_r = \frac{1}{N_r} \sum_{j=1}^{N_r} X_j^{(r)} \quad (6.100)$$

$$\hat{\Sigma}_r = \frac{1}{N_r - 1} \sum_{j=1}^{N_r} (X_j^{(r)} - \hat{M}_r)(X_j^{(r)} - \hat{M}_r)^T \quad (6.101)$$

donde  $X_j^{(r)}$  es la muestra j de la clase r y  $N_r$  es el número de muestras de la clase r. Llegándose a que el vector  $\hat{Y}$  contiene  $2[n+n(n+1)/2]$  componentes

$$\hat{Y} = [\hat{m}_1^{(1)}, \dots, \hat{m}_n^{(1)}, \hat{m}_1^{(2)}, \dots, \hat{m}_n^{(2)}, \hat{c}_{11}^{(1)}, \dots, \hat{c}_{nn}^{(1)}, \hat{c}_{11}^{(2)}, \dots, \hat{c}_{nn}^{(2)}]^T \quad (6.102)$$

definiendo  $\Delta m_i^{(r)} = \hat{m}_i^{(r)} - m_i^{(r)}$  e  $\Delta c_{ij}^{(r)} = \hat{c}_{ij}^{(r)} - c_{ij}^{(r)}$ , las variables aleatorias de la expresión ( 6.102 ) satisfacen las siguientes propiedades estadística

1. La media y la matriz de covarianzas son insesgada,

$$E\{\Delta m_i^{(r)}\} = 0 \quad E\{\Delta c_{ij}^{(r)}\} = 0 \quad ( 6.103 )$$

2. Las muestras entre diferentes clases son independientes,

$$\begin{aligned} E\{\Delta m_i^{(1)} \Delta m_j^{(2)}\} &= E\{\Delta m_i^{(1)}\} E\{\Delta m_j^{(2)}\} = 0 \\ E\{\Delta c_{ij}^{(1)} \Delta c_{kl}^{(2)}\} &= 0 \\ E\{\Delta m_i^{(r)} \Delta c_{kl}^{(s)}\} &= 0 \quad r \neq s \end{aligned} \quad ( 6.104 )$$

3. La matriz de covarianzas del vector esperado es diagonal

$$\begin{aligned} E\{(\hat{M}_r - M_r)(\hat{M}_r - M_r)^T\} &= \frac{1}{N^{(r)}} \Lambda_r \\ E\{\Delta m_i^{(r)} \Delta m_j^{(r)}\} &= \frac{\lambda_i^{(r)}}{N^{(r)}} \delta_{ij} \end{aligned} \quad ( 6.105 )$$

donde  $\lambda_i^{(r)}$  es la componente i diagonal de la matriz  $\Lambda_r$ , mientras  $\delta_{ij}$  es uno cuando i es igual a j, y en caso contrario será nulo .

4. Los momentos de tercer orden para una distribución normal son nulos

$$E\{\Delta m_i^{(r)} \Delta c_{kl}^{(r)}\} = 0 \quad ( 6.106 )$$

5. Los momentos de orden cuarto para una distribución normal son

$$E\{\Delta c_{ij}^{(r)} \Delta c_{kl}^{(s)}\} = \begin{cases} \frac{\lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(r)}}{N^{(r)}} & i \neq j, i = k, j = l \\ \frac{2\lambda_i^{(r)}}{N^{(r)} - 1} & i = k = j = l \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad ( 6.107 )$$

Partiendo de la formulación general y aplicándolo sobre  $N_1(M_1, \Sigma_1)$  y  $N_2(M_2, \Sigma_2)$ , se obtiene el sesgo de la función introduciendo de ( 6.100 ) a ( 6.107 ) en ( 6.98 ) :

$$\begin{aligned} E\{\Delta f\} &= E\{\hat{f}\} - f \cong \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} E\{\Delta Y \Delta Y^T\} \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j} E\{\Delta y_i \Delta y_j\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial m_i^{(r)}} E\{\Delta m_i^{(r)2}\} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial c_{ii}^{(r)}} E\{\Delta c_{ii}^{(r)2}\} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial^2 f}{\partial c_{ij}^{(r)}} E\{\Delta c_{ij}^{(r)2}\} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial m_i^{(r)}} \frac{\lambda_i^{(r)}}{N^{(r)}} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial c_{ii}^{(r)}} \frac{2\lambda_i^{(r)}}{N^{(r)} - 1} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial^2 f}{\partial c_{ij}^{(r)}} \frac{\lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(r)}}{N^{(r)}} \right] \quad ( 6.108 ) \end{aligned}$$

De la misma forma, la varianza de la función estimada se consigue introduciendo de ( 6.100 ) a ( 6.107 ) en ( 6.99 )

$$\text{Var}\{\hat{f}\} \cong \sum_{r=1}^2 \left[ \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial f}{\partial m_i^{(r)}} \right]^2 \frac{\lambda_i^{(r)}}{N^{(r)}} + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial f}{\partial c_{ii}^{(r)}} \right]^2 \frac{2\lambda_i^{(r)2}}{N^{(r)} - 1} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \frac{\partial f}{\partial c_{ij}^{(r)}} \right]^2 \frac{\lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(r)}}{N^{(r)}} \right] \quad ( 6.109 )$$

incluso cuando la distribución no sea normal, ( 6.103 ) ( 6.104 ) y ( 6.105 ) son válidas. Sin embargo, el tercer y cuarto orden de momentos, ( 6.106 ) y ( 6.107 ), deben ser modificados por

$$E\{\Delta m_i^{(r)} \Delta c_{kl}^{(r)}\} \cong \frac{1}{N^{(r)}} \text{cov}\{\Delta x_i^{(r)}, \Delta x_k^{(r)} \Delta x_l^{(r)}\} \quad ( 6.110 )$$

$$E\{\Delta c_{ij}^{(r)} \Delta c_{kl}^{(r)}\} \cong \begin{cases} \text{Var}\{\Delta x_i^{(r)} \Delta x_j^{(r)}\} / N^{(r)} & i \neq j, i = k, j = l \\ \text{Var}\{\Delta x_i^{(r)2}\} / N^{(r)} & i = j = k = l \\ \text{Cov}\{\Delta x_i^{(r)} \Delta x_j^{(r)}, \Delta x_k^{(r)} \Delta x_l^{(r)}\} / N^{(r)} & \text{Para cualquier otro caso} \end{cases} \quad ( 6.111 )$$

### 6.2.1.2 Sesgo y la varianza de la distancia de Bhattacharyya

Si las dos distribuciones son normales, la distancia de Bhattacharyya da el límite superior del error de Bayes,  $\epsilon$ , tal como se discutió en 6.1.2.2.1. Retomando la expresión

$$\mu = \frac{1}{8} (M_2 - M_1)^T \left[ \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{2} \right]^{-1} + \frac{1}{2} \ln \frac{\left[ \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{2} \right]}{\sqrt{\Sigma_1 \Sigma_2}} \quad (6.112)$$

si  $M_i$  y  $\Sigma_i$  son estimadas a partir de un número de muestras finitas con ( 6.100 ) y ( 6.101 ), el resultado de  $\hat{\mu}$  difiere del verdadero valor. Haciendo uso de las expresiones vistas ( 6.108 ) y ( 6.109 ), es posible calcular el sesgo y la varianza de  $\hat{\mu}$ .

Las derivadas de  $\mu_1$  respecto de  $M_r$  son :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial M_r} = (-1)^r \frac{1}{4} \bar{\Sigma}^{-1} (M_2 - M_1) \quad (6.113)$$

$$\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial M_r^2} = \frac{1}{4} \bar{\Sigma}^{-1} \quad (6.114)$$

donde  $\bar{\Sigma} = (\Sigma_1 + \Sigma_2) / 2$ . Las derivadas de  $\mu_1$  respecto de  $c_{ij}^{(r)}$ , utilizando  $M = M_2 - M_1$  queda :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial c_{ij}^{(r)}} = \frac{\partial \mu_1}{\partial c_{ij}} \frac{\partial \bar{c}_{ij}}{\partial c_{ij}^{(r)}} = -\frac{1}{16} (2 - \delta_{ij}) \frac{m_i m_j}{\bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j} \quad (6.115)$$

$$\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial c_{ij}^{(r)2}} = \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial \bar{c}_{ij}^{(r)2}} \left[ \frac{\partial^2 \bar{c}_{ij}^{(r)}}{\partial c_{ij}^{(r)}} \right]^2 = \frac{1}{32 \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j} (2 - \delta_{ij}) \left( \frac{m_i^2}{\bar{\lambda}_i} + \frac{m_j^2}{\bar{\lambda}_j} \right) \quad (6.116)$$

siendo  $\bar{c}_{ij} = (c_{ij}^{(1)} + c_{ij}^{(2)}) / 2$ ,  $\bar{\lambda}_i = (\lambda_i^{(1)} + \lambda_i^{(2)}) / 2$ . Introduciendo de ( 6.113 ) a ( 6.116 ) en ( 6.108 ) y ( 6.109 ), y realizando una transformación blanqueante I- $\Lambda$ ,  $\lambda_i^{(1)} = 1$  y  $\lambda_i^{(2)} = \lambda_i$  quedará:

$$E\{\Delta \mu_1\} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2(1 + \lambda_i)} \left( \frac{1}{N_1} + \frac{\lambda_i}{N_2} \right) + \frac{m_i^2}{(1 + \lambda_i)^3} \left( \frac{1}{N_1 - 1} + \frac{\lambda_i^2}{N_2 - 1} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m_i^2 (1 + \lambda_j) + m_j^2 (1 + \lambda_i)}{2(1 + \lambda_i)^2 (1 + \lambda_j)^2} \left( \frac{1}{N_1} + \frac{\lambda_i \lambda_j}{N_2} \right) \quad (6.117)$$

$$Var\{\hat{\mu}_1\} = \frac{1}{4} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{m_i^2}{(1+\lambda_i)^2} \left( \frac{1}{N_1} + \frac{\lambda_i}{N_2} \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i^2 m_j^2}{2(1+\lambda_i)^2 (1+\lambda_j)^2} \left( \frac{1}{N_1} + \frac{\lambda_i \lambda_j}{N_2} \right) \right] \quad (6.118)$$

De igual proceder es seguido para  $\mu_2$

$$\frac{\partial \mu_2}{\partial M_r} = 0 \quad (6.119)$$

$$\frac{\partial^2 \mu_2}{\partial M_r^2} = 0 \quad (6.120)$$

$$\frac{\partial \mu_2}{\partial c_{ij}^{(r)}} = \frac{\delta_{ij}}{4} \left[ \frac{1}{\bar{\lambda}_i} - \frac{1}{\lambda_i^{(r)}} \right] \quad (6.121)$$

$$\frac{\partial^2 \mu_2}{\partial c_{ij}^{(r)2}} = \frac{2 - \delta_{ij}}{4} \left[ \frac{1}{\lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(r)}} - \frac{1}{2 \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j} \right] \quad (6.122)$$

El sesgo y la varianza de  $\mu_2$  se consigue insertando de ( 6.119 ) a ( 6.122 ) en las expresiones ( 6.108 ) y ( 6.109 ) queda:

$$E\{\Delta \mu_2\} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left( 1 - \frac{2}{(1+\lambda_i)^2} \right) \frac{1}{N_1 - 1} + \left( \frac{1}{\lambda_i^2} - \frac{2}{(1+\lambda_i)^2} \right) \frac{\lambda_i^2}{N_2 - 1} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \left( 1 - \frac{2}{(1+\lambda_i)(1+\lambda_j)} \right) \frac{1}{N_1} + \left( \frac{1}{\lambda_i \lambda_j} - \frac{2}{(1+\lambda_i)(1+\lambda_j)} \right) \frac{\lambda_i \lambda_j}{N_2} \quad (6.123)$$

$$Var\{\hat{\mu}_2\} = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{(1+\lambda_i)} - \frac{1}{2} \right)^2 \frac{1}{N_1 - 1} + \left( \frac{1}{(1+\lambda_i)} - \frac{1}{2\lambda_i} \right)^2 \frac{\lambda_i^2}{N_2 - 1} \right] \quad (6.124)$$

Las expresiones ( 6.117 ), ( 6.118 ), ( 6.123 ) y ( 6.124 ) fueron presentadas en el VII Symposium Nacional de Reconocimiento de Formas y Análisis de Imágenes [Plate97].

### 6.2.2 Efecto del número de muestras en el diseño de clasificadores paramétricos

El estudio sobre la influencia de las muestras en el diseño de clasificadores es complicado, y aunque se trata de mantener una expresión de tipo general, las conclusiones definitivas obtenidas harán referencia a clasificadores lineales y cuadráticos.

Considerando que las funciones discriminantes dependen de las medias de los grupos,  $M_1$  y  $M_2$ , así como de las matrices de covarianzas,  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ , y que se dispone de un número finito de muestras, habiéndose estimado  $M_i$  y  $\Sigma_i$  a partir de ellas, el sesgo de  $h(X)$  será :

$$\Delta h(X) = \hat{h}(X) - h(X) = \sum_{k=1}^{\infty} 0^{(k)} \quad (6.125)$$

donde  $\hat{h}(X) = h(X, \hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{\Sigma}_1, \hat{\Sigma}_2)$ ,  $h(X) = h(X, M_1, M_2, \Sigma_1, \Sigma_2)$  y  $0^{(k)}$  es el k-ésimo orden del desarrollo de Taylor en términos de variaciones de  $\hat{M}_i$  y  $\hat{\Sigma}_i$ . Si las muestras siguen distribución normal y los estimadores son insesgados,

$$E_d\{0^{(1)}\} = 0 \quad E_d\{0^{(2)}\} \approx 1/N \quad E_d\{0^{(3)}\} = 0 \quad E_d\{0^{(4)}\} \approx 1/N^2 \quad (6.126)$$

donde E indica la esperanza con respecto a las muestras de diseño, y siendo  $N_1=N_2=N$  el número de muestras de diseño, se concluye desde (6.125) y (6.126) que:

$$E_d\{\Delta h(X)\} \approx 1/N \quad E_d\{\Delta h^2(X)\} \approx 1/N \quad E_d\{\Delta h^3(X)\} = 1/N^2 \quad E_d\{\Delta h^4(X)\} \approx 1/N^2 \quad (6.127)$$

si N es razonablemente grande, sólo interesa  $E\{\Delta h^m(X)\}$  menor o igual 2. Por otro lado, haciendo uso de la expresión genérica del error :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \iint \frac{e^{j\omega h(X)}}{j\omega} \tilde{p}(X) d\omega dX \quad (6.128)$$

cuando  $\Delta h$  sea pequeño, es posible aproximarlos por términos de hasta segundo orden:

$$e^{j\omega \hat{h}(X)} = e^{j\omega h(X)} e^{j\omega \Delta h(X)} \cong e^{j\omega h(X)} \left[ 1 + j\omega \Delta h(X) + \frac{(j\omega)^2}{2} \Delta h^2(X) \right] \quad (6.129)$$

luego,  $\Delta \varepsilon = \hat{\varepsilon} - \varepsilon$  puede ser aproximada por

$$\Delta \varepsilon \cong \frac{1}{2\pi} \iint \left[ \Delta h(X) + \frac{j\omega}{2} \Delta h^2(X) \right] e^{j\omega h(X)} \tilde{p}(X) d\omega dX \quad (6.130)$$

la esperanza del error respecto al número de muestras de diseño será :

$$E\{\hat{\varepsilon}\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \iint \frac{E_d \{e^{j\omega h(X)}\}}{j\omega} \tilde{p}(X) d\omega dX = \varepsilon + \Delta \bar{\varepsilon} \quad (6.131)$$

donde se deduce que el sesgo puede ser aproximado a :

$$\Delta \bar{\varepsilon} \cong \frac{1}{2\pi} \iint E_d \left\{ \Delta h(X) + \frac{j\omega}{2} \Delta h^2(X) \right\} e^{j\omega h(X)} \tilde{p}(X) d\omega dX \quad (6.132)$$

cuando h es función de q parámetros,  $y_1, \dots, y_q$ ,  $\Delta h$  es

$$\Delta h \cong \sum_{i=1}^q \frac{\partial h}{\partial y_i} \Delta y_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \frac{\partial^2 h}{\partial y_i \partial y_j} \Delta y_i \Delta y_j \quad (6.133)$$

considerando que los estimadores son insesgados,  $E\{\Delta y_i\} = 0$ , y descartando términos superiores al segundo orden

$$\begin{aligned} E\{\Delta h\} &\cong \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \frac{\partial^2 h}{\partial y_i \partial y_j} E_d \{ \Delta y_i \Delta y_j \} \\ E\{\Delta h^2\} &\cong \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \frac{\partial h}{\partial y_i} \frac{\partial h}{\partial y_j} E_d \{ \Delta y_i \Delta y_j \} \end{aligned} \quad (6.134)$$

e introduciendo ( 6.134 ) en ( 6.132 )

$$\Delta \bar{\varepsilon} \cong \frac{1}{2\pi} \iint \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial y_i \partial y_j} + j\omega \frac{\partial h}{\partial y_i} \frac{\partial h}{\partial y_j} \right] E_d \{ \Delta y_i \Delta y_j \} e^{j\omega h(X)} \tilde{p}(X) d\omega dX \quad (6.135)$$

si los parámetros son  $M_1, M_2, \Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  de dos distribuciones normales, al aplicar las esperanza de los sesgo de los parámetros queda

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\varepsilon} \equiv & \frac{1}{4\pi} \iint \sum_{r=1}^2 \left[ \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial m_i^{(r)2}} + j\omega \left( \frac{\partial h}{\partial m_i^{(r)}} \right)^2 \right] \frac{\lambda_i^{(r)}}{N^{(r)}} + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial c_{ii}^{(r)2}} + j\omega \left( \frac{\partial h}{\partial c_{ii}^{(r)}} \right)^2 \right] \frac{2\lambda_i^{(r)}}{N^{(r)} - 1} \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial c_{ij}^{(r)2}} + j\omega \left( \frac{\partial h}{\partial c_{ij}^{(r)}} \right)^2 \right] \frac{\lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(r)}}{N^{(r)}} \right] e^{j\omega h(X)} \tilde{p}(X) d\omega dX \end{aligned} \quad (6.136)$$

expresión que va a depender de como  $h$  este constituida por  $M_i$  y  $\Sigma_i$ . Obsérvese que el sesgo va a depender del número de muestras. Por lo tanto, para estos clasificadores

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon + \frac{v}{N} \quad (6.137)$$

donde  $v$  vendrá definida por la arquitectura del clasificador. Los siguientes párrafos tratan de localizar  $v$  para clasificadores cuadráticos y lineales.

### 6.2.2.1 Sesgo de Clasificadores cuadráticos

En el caso de utilizar un clasificador cuadrático,  $h(X)$  será del tipo

$$h(X) = \frac{1}{2} (X - M_1)^T \Sigma_1^{-1} (X - M_1) - \frac{1}{2} (X - M_2)^T \Sigma_2^{-1} (X - M_2) + \frac{1}{2} \ln \frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_2|} - t \quad (6.138)$$

donde  $t$  es el umbral fijado por las probabilidad de los *clusters*. Para el cálculo del sesgo del error se utilizará (6.136), del que es necesario introducir las derivadas parciales de  $h$  respecto a sus parámetros. Haciendo uso de *Fukunaga et al* [Fukun89] para obtenerlas, se tiene:

$$\frac{\partial h}{\partial M_r} = (-1)^r \Lambda_r (X - M_r) \quad (6.139)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial M_r^2} = (-1)^{r+1} \Lambda_r \quad (6.140)$$

$$\frac{\partial h}{\partial c_{ij}^{(r)}} = (-1)^r \frac{1}{2} \left[ \left( 2 - \delta_{ij} \right) \frac{(x_i - m_i^{(r)})(x_j - m_j^{(r)})}{\lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(r)}} - \frac{\delta_{ij}}{\lambda_i^{(r)}} \right] \quad (6.141)$$



$$\frac{\partial^2 h}{\partial c_{ij}^{(r)2}} = (-1)^{r+1} \frac{(2 - \delta_{ij})}{2} \left[ \frac{(x_i - m_i^{(r)})^2}{\lambda_i^{(r)2} \lambda_j^{(r)}} + \frac{(x_j - m_j^{(r)})^2}{\lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(r)}} \right] - \frac{1}{\lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(r)}} \quad (6.142)$$

donde  $r = 1, 2$ . Considerando que los datos son transformados sin pérdida de generalidad a I- $\Lambda$ , tal que  $\lambda_i^{(1)} = 1$ ,  $\lambda_i^{(2)} = \lambda$  junto  $m_i^{(1)} = 0$  y  $m_i^{(2)} = m_i$ , e introduciendo de (6.139) a (6.142) en (6.136), el valor de  $v$  de (6.137) para el clasificador llega a ser :

$$v_q = \frac{1}{2\pi} \iint f(X, \omega) e^{j\omega h(X)} \tilde{p}(X) d\omega dX \quad (6.143)$$

donde

$$f_q(X, \omega) = \frac{1}{2} \left[ (n+1) \sum_{i=1}^n \left\{ x_i^2 - \frac{(x_i - m_i)^2}{\lambda_i} \right\} + j\omega \left[ n + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ x_i^2 x_j^2 + \frac{(x_i - m_i)^2 (x_j - m_j)^2}{\lambda_i \lambda_j} \right\} \right] \right] \quad (6.144)$$

integral extendida en  $X$   $n$ -dimensional y en el barrido de la frecuencia. El procedimiento para su determinación es similar al empleado en el cálculo del error visto en 6.1.2.1.1. La integración de (6.143) será llevada a cabo mediante la descomposición polinómica de momentos no centrados respecto de  $X$ . Éstos son función de la frecuencia, habiéndose transformado la integración en  $n+1$  dimensional a unidimensional.

#### 6.2.2.1.1 Caso I-I<sup>1</sup>

Para el caso de datos I-I es posible obtener una expresión explícita de la integración de (6.143). Considerando dos poblaciones normales  $N_X(0, I)$  y  $N_X(0, M)$ , se puede escribir  $e^{j\omega h(X)} p(X|\omega_i)$  como

$$e^{j\omega h(X)} p(X|\omega_i) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{M^T M}} e^{-M^T M/8} N_\omega \left( -\frac{j}{2}, \frac{1}{M^T M} \right) N_X(j\omega M, I) \quad (6.145)$$

<sup>1</sup> Dos grupos normales con matrices idénticas y transformadas a unitaria

$$e^{j\omega h(X)} p(X|\omega_2) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{M^T M}} e^{-M^T M/8} N_\omega\left(\frac{j}{2}, \frac{1}{M^T M}\right) N_X((1+j\omega)M, I) \quad (6.146)$$

donde  $N_\omega(a,b)$  y  $N_X(D,K)$  son funciones de densidad de  $\omega$  y  $X$ , con un vector de medias  $a$  y varianza  $b$  para  $N_\omega$  y con vector de medias  $D$  y matriz de covarianza  $K$  para  $N_X$ .

Desde la observación de tener  $f_q(X,\omega)$  como una combinación de  $x_i^k x_j^l$  ( $k, l \leq 4$ ), véase con mayor detenimiento para el caso general  $I-\Lambda$ ,  $\int f_q(X,\omega) N_X(D,K) dX$  es una conjunción de momentos no centrados de  $N_X(D,K)$ . El resultado de la integración se convierte en un polinomio en  $\omega$

$$\begin{aligned} \gamma_i(\omega) = & \frac{(M^T M)^2}{2} (j\omega)^5 \mp (M^T M)^2 (j\omega)^4 + \frac{(M^T M)^2}{2} (n+5+3(M^T M)) (j\omega)^3 \\ & \mp \frac{(M^T M)^2}{2} (n+5+2(M^T M)) (j\omega)^2 \\ & + \frac{1}{4} [n(n+7) + (5n+9)M^T M + (M^T M)^2] (j\omega) \mp \frac{(n+1)M^T M}{2} \end{aligned} \quad (6.147)$$

donde  $-$  y  $+$  de  $\mp$  son para  $i = 1$  y  $2$  respectivamente. De nuevo, la integral  $\int \gamma_i(\omega) N_\omega(a,b) d\omega$  es una combinación de momentos de  $N_\omega(a,b)$ . Para el caso de  $p(\omega_1) = p(\omega_2) = 0.5$ , el valor de  $v_q$  tiene la siguiente expresión analítica

$$v_q = \frac{1}{4\sqrt{2\pi M^T M}} e^{-M^T M/8} \left[ n^2 + \left( 1 + \frac{M^T M}{2} \right) n + \left( \frac{(M^T M)^2}{16} - \frac{(M^T M)}{2} - 1 \right) \right] \quad (6.148)$$

#### 6.2.2.1.2 Caso $I-\Lambda^2$

Para el caso general será necesario recurrir al cálculo numérico, no habiéndose determinado ninguna solución explícita. De la misma manera que en el caso anterior y aplicando el procedimiento visto para el cálculo de la función característica (6.1.2.1.1), se pasa simultáneamente una diagonalización y desplazamiento en los datos,  $Y = A^T (X - M_T)$ , tal que quedará  $N_1(0,I)$  y  $N_2(M,\Lambda)$ , donde

---

<sup>2</sup> Dos grupos normales con transformación blanqueante

$$v_{q_r} = \frac{(-1)^{r+1} p(\omega_r)}{2\pi} \iint f_q(Y, \omega) e^{j\omega h(Y)} p(Y | \omega_r) dY d\omega \quad r = 1, 2 \quad (6.149)$$

Para su resolución se considera exclusivamente el caso unidimensional, siendo esta solución una de las aportaciones de la tesis. Si se analiza las expresiones  $e^{j\omega h(Y)} p(Y | \omega_r)$  para ambos grupos quedará:

$$\begin{aligned} e^{j\omega h(y)} p(y | \omega_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( y^2 - \frac{j\omega y^2 (\lambda - 1)}{\lambda} \right) - j\omega v y + j\omega c \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - j\omega \frac{\lambda - 1}{\lambda}}} N_y \left( \frac{-j\omega v}{1 - j\omega \frac{\lambda - 1}{\lambda}}, \frac{1}{1 - j\omega \frac{\lambda - 1}{\lambda}} \right) \exp \left( -\frac{(\omega v)^2}{2 \left( 1 - j\omega \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right)} + j\omega c \right) \end{aligned} \quad (6.150)$$

y para el segundo grupo:

$$\begin{aligned} e^{j\omega h(y)} p(y | \omega_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \lambda^{1/2}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{(y - m)^2}{\lambda} - \frac{j\omega y^2 (\lambda - 1)}{\lambda} \right) - j\omega v y + j\omega c \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda} - j\omega \frac{\lambda - 1}{\lambda}} \lambda^{1/2}} N_y \left( \frac{\frac{m}{\lambda} - j\omega v}{\frac{1}{\lambda} - j\omega \frac{\lambda - 1}{\lambda}}, \frac{1}{\frac{1}{\lambda} - j\omega \frac{\lambda - 1}{\lambda}} \right) \exp \left( \frac{\left( j\omega v - \frac{m}{\lambda} \right)^2}{2 \left( \frac{1}{\lambda} - j\omega \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right)} - \frac{m^2}{2\lambda} + j\omega c \right) \end{aligned} \quad (6.151)$$

donde

$$v = \frac{-m}{\lambda}; c = -\frac{m^2}{2\lambda} - \frac{1}{2} \ln \lambda - t \quad (6.152)$$

observándose que la diferencia respecto a la función característica de (6.1.2.1.1) es la inserción de  $f_q(Y, \omega)$ . Pero  $f_q(y, \omega)$  es un polinomio de  $y^k$ , con  $k$  desde cero a cuatro. Éste junto con  $e^{j\omega h(Y)} p(Y | \omega_r)$  representarán el desarrollo en momentos no centrados de  $N_y(\mu, \sigma^2)$ , que para el caso del grupo 1 será  $N_y \left( \frac{-j\omega v}{1 - j\omega (\lambda - 1)/\lambda}, \frac{1}{1 - j\omega (1 - \lambda)/\lambda} \right)$ , mientras para el grupo 2 se tendrá  $N_y \left( \frac{m/\lambda - j\omega v}{1/\lambda - j\omega (\lambda - 1)/\lambda}, \frac{1}{1/\lambda - j\omega (\lambda - 1)/\lambda} \right)$ . Todo ello permitirá la conversión de (6.143) en integral unidimensional extendida en la

frecuencia. Para ello habrá de tener los momentos no centrados correspondientes a una normal unidimensional  $N_y(\mu, \sigma^2)$ , que son

$$\begin{aligned} E\{y\} &= \mu \\ E\{y^2\} &= \mu^2 + \sigma^2 \\ E\{y^3\} &= \mu(\mu^2 + 3\sigma^2) \\ E\{y^4\} &= \mu^4 + 3\sigma^4 + 6\mu^2\sigma^2 \end{aligned} \quad (6.153)$$

insertando dichas expresiones en (6.144), los polinomios correspondientes serán:

$$\begin{aligned} \gamma_1(\omega) &= \frac{j\omega}{4} \left( 1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( \frac{3}{\left( 1 - \frac{j\omega(\lambda-1)}{\lambda} \right)^2} + \frac{(j\omega v)^4}{\left( 1 - \frac{j\omega(\lambda-1)}{\lambda} \right)^4} + \frac{6(j\omega v)^2}{\left( 1 - \frac{j\omega(\lambda-1)}{\lambda} \right)^3} \right) + \\ &+ \frac{(j\omega)^2 m v \left( \frac{3}{\left( 1 - \frac{j\omega(\lambda-1)}{\lambda} \right)} + \frac{(j\omega v)^2}{\left( 1 - \frac{j\omega(\lambda-1)}{\lambda} \right)^2} \right)}{\lambda^2 \left( 1 - \frac{j\omega(\lambda-1)}{\lambda} \right)} + \\ &+ \left( 1 - \frac{1}{\lambda} + \frac{3j\omega m^2}{2\lambda^2} \right) \left( \frac{1}{\left( 1 - \frac{j\omega(\lambda-1)}{\lambda} \right)} + \frac{(j\omega v)^2}{\left( 1 - \frac{j\omega(\lambda-1)}{\lambda} \right)^2} \right) \\ &- \frac{\left( \frac{2m}{\lambda} - \frac{j\omega m^3}{\lambda^2} \right) j\omega v}{\left( 1 - \frac{j\omega(\lambda-1)}{\lambda} \right)} + \frac{1}{2} j\omega \left( 1 + \frac{m^4}{2\lambda^2} \right) - \frac{m^2}{\lambda} \end{aligned} \quad (6.154)$$

y para el grupo 2 será:

$$\begin{aligned}
\gamma_2(\omega) = & \frac{j\omega}{4} \left( 1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( \frac{3}{\left( \frac{1}{\lambda} - \frac{j\omega(\lambda-1)}{\lambda} \right)^2} + \frac{(j\omega - \frac{m}{\lambda})^4}{\left( -\frac{1}{\lambda} + \frac{j\omega(\lambda-1)}{\lambda} \right)^4} + \frac{6(j\omega - \frac{m}{\lambda})^2}{\left( \frac{1}{\lambda} - \frac{j\omega(\lambda-1)}{\lambda} \right)^3} \right) + \\
& + \frac{\left( j\omega - \frac{m}{\lambda} \right)^2 j\omega m \left( \frac{3}{\left( \frac{1}{\lambda} - \frac{j\omega(\lambda-1)}{\lambda} \right)} + \frac{(j\omega - \frac{m}{\lambda})^2}{\left( \frac{1}{\lambda} - \frac{j\omega(\lambda-1)}{\lambda} \right)^2} \right)}{\lambda^2 \left( -\frac{1}{\lambda} + \frac{j\omega(\lambda-1)}{\lambda} \right)} + \\
& + \left( 1 - \frac{1}{\lambda} + \frac{3j\omega m^2}{2\lambda^2} \right) \left( \frac{1}{\left( \frac{1}{\lambda} - \frac{j\omega(\lambda-1)}{\lambda} \right)} + \frac{(j\omega - \frac{m}{\lambda})^2}{\left( -\frac{1}{\lambda} + \frac{j\omega(\lambda-1)}{\lambda} \right)^2} \right) \\
& + \frac{\left( \frac{2m}{\lambda} - \frac{j\omega m^3}{\lambda^2} \right) \left( j\omega - \frac{m}{\lambda} \right)}{\left( -\frac{1}{\lambda} + \frac{j\omega(\lambda-1)}{\lambda} \right)} + \frac{1}{2} j\omega \left( 1 + \frac{m^4}{2\lambda^2} \right) - \frac{m^2}{\lambda}
\end{aligned}
\tag{ 6.155 }$$

Obteniendo una integral unidimensional definida en el rango de la frecuencia. Ésta deberá ser calculada numéricamente. Las expresiones ( 6.154 ) y ( 6.155 ) son aportaciones de esta tesis y son las expresiones genéricas para el caso unidimensional. Si se aplica dos poblaciones normales unidimensionales de igual varianza,  $N_1(0,I)$  y  $N_1(M,I)$ , en estas ecuaciones se obtendrán las conclusiones vistas en ( 6.147 ). Las evaluaciones de estas expresiones serán realizadas en el apartado 6.5

### 6.2.2.2 Sesgo de clasificadores lineales

Al utilizar un clasificador lineal de Fisher con  $h(X)$  igual a :

$$h(X) = (M_2 - M_1)^T \bar{\Sigma}^{-1} X + \frac{1}{2} (M_1^T \bar{\Sigma}^{-1} M_1 - M_2^T \bar{\Sigma}^{-1} M_2) \tag{ 6.156 }$$

donde  $\bar{\Sigma} = (\Sigma_1 + \Sigma_2) / 2$  y considerando las derivadas parciales de  $h(X)$  respecto a sus estimadores,  $M_i$  y  $\Sigma_i$ , [Fukun89] :

$$\frac{\partial h}{\partial M_r} = (-1)^r \bar{\Sigma}^{-1} (X - M_r) \quad (6.157)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial M_r^2} = (-1)^{r+1} \bar{\Sigma}^{-1} \quad (6.158)$$

$$\frac{\partial h}{\partial c_{ij}^{(r)}} = \frac{\partial h}{\partial \bar{c}_{ij}} \frac{\partial \bar{c}_{ij}}{\partial c_{ij}^{(r)}} = -\frac{1}{2\bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j} (\alpha_{ij} + \alpha_{ji} - \delta_{ij} \alpha_{ij}) \quad (6.159)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial c_{ij}^{(r)2}} = \frac{\partial^2 h}{\partial \bar{c}_{ij}^2} \left[ \frac{\partial \bar{c}_{ij}}{\partial c_{ij}^{(r)}} \right]^2 = \frac{2}{4\bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_j} \left( \frac{\alpha_{ij}}{\bar{\lambda}_i} + \frac{\alpha_{ji}}{\bar{\lambda}_j} - \delta_{ij} \frac{\alpha_{ij}}{\bar{\lambda}_i} \right) \quad (6.160)$$

donde

$$\alpha_{ij} = (m_i^{(2)} - m_i^{(1)})x_j + \frac{1}{2}(m_i^{(1)}m_j^{(1)} - m_i^{(2)}m_j^{(2)})$$

y  $\bar{c}_{ij} = (c_{ij}^{(1)} + c_{ij}^{(2)}) / 2$ ,  $\bar{\lambda}_i = (\lambda_i^{(1)} + \lambda_i^{(2)}) / 2$ . En particular, cuando se hace una transformación y desplazamiento a I- $\Lambda$ ,  $\lambda_i^{(1)} = 1, \lambda_i^{(2)} = \lambda_i, m_i^{(1)} = 0$  y  $m_i^{(2)} = m_i$ , las expresiones ( 6.159 ) y ( 6.160 ) quedan como :

$$\frac{\partial h}{\partial c_{ij}^{(r)}} = -\frac{2}{(1 + \lambda_i)(1 + \lambda_j)} (\alpha_{ij} + \alpha_{ji} - \delta_{ij} \alpha_{ij}) \quad (6.161)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial c_{ij}^{(r)2}} = \frac{4}{(1 + \lambda_i)(1 + \lambda_j)} \left( \frac{\alpha_{ij}}{(1 + \lambda_i)} + \frac{\alpha_{ji}}{(1 + \lambda_j)} - \delta_{ij} \frac{\alpha_{ij}}{(1 + \lambda_i)} \right) \quad (6.162)$$

donde

$$\alpha_{ij} = m_i x_j - \frac{1}{2} m_i m_j = \frac{m_i}{2} (2x_j - m_j) \quad (6.163)$$

Introduciendo de ( 6.157 ) a ( 6.162 ) :

$$v_l = \frac{1}{2\pi} \iint f_l(X, \omega) e^{j\omega h(X)} \tilde{p}(X) d\omega dX \quad (6.164)$$

donde:

$$f_l(Y, \omega) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i} + (2y_i - m_i) \left( \frac{(1 - \lambda_i^2)m_i}{(1 + \lambda_i)^3} + \frac{m_i}{(1 + \lambda_i)^2} \sum_{j=1}^n \frac{1 - \lambda_i \lambda_j}{1 + \lambda_j} \right) \right) +$$

$$+ \frac{j\omega}{2} \left( 4 \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2 + (y_i - m_i)^2 \lambda_i}{(1 + \lambda_i)^2} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i (2y_j - m_j) (1 + \lambda_i \lambda_j)}{(1 + \lambda_i)^2 (1 + \lambda_j)^2} (m_i (2y_j - m_j) + m_j (2y_i - m_i)) \right) \quad (6.165)$$

siendo  $f_l(Y, \omega)$  una combinación lineal de  $y_i^k$  ( $k \leq 2$ ),  $v_l$  tiene solución explícita para el caso I-I, resultado:

$$v_l = \frac{1}{2\sqrt{2\pi} M^T M} e^{-M^T M / 8} \left( \left( 1 + \frac{M^T M}{4} \right)^{n-1} \right) \quad (6.166)$$

#### 6.2.2.2.1 Caso I-Λ

Con igual procedimiento que para el clasificador cuadrático habrá de recurrir al cálculo numérico y sólo se ha efectuado para el caso unidimensional. El planteamiento es similar al cálculo de la función característica lineal (6.1.2.1.2). Se pasa simultáneamente una diagonalización y desplazamiento en los datos,  $Y = A^T (X - M_T)$ , tal que quedará  $N_1(0, I)$  y  $N_2(M, \Lambda)$ , donde

$$v_{l_r} = \frac{(-1)^{r+1} p(\omega_r)}{2\pi} \iint f_l(Y, \omega) e^{j\omega h(Y)} p(Y | \omega_r) dY d\omega \quad r = 1, 2 \quad (6.167)$$

Analizando las expresiones  $e^{j\omega h(Y)} p(Y | \omega_r)$  para ambos grupos quedará:

$$e^{j\omega h(y)} p(y | \omega_1) = \frac{1}{2\pi} \exp \left( -\frac{1}{2} y^2 + j\omega v y + j\omega c \right) = N_y(j\omega v, 1) \exp \left( -\frac{(\omega v)^2}{2} + j\omega c \right) \quad (6.168)$$

y para el segundo grupo:

$$\begin{aligned} e^{j\omega h(y)} p(y | \omega_2) &= \frac{1}{2\pi\lambda^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(y-m)^2}{\lambda}\right) + j\omega v y + j\omega c\right) \\ &= N_y(j\omega v \lambda + m, \lambda) \exp\left(\frac{(j\omega v)^2 \lambda}{2} + j\omega(c + vm)\right) \end{aligned} \quad (6.169)$$

donde

$$v = \frac{2m}{1+\lambda}; c = -\frac{m^2}{\lambda+1} \quad (6.170)$$

quedando que  $f_1(y, \omega)$  es un polinomio de  $y^k$ , con  $k$  desde cero a dos. Éste junto con  $e^{j\omega h(Y)} p(Y | \omega_r)$  representará el desarrollo en momentos no centrados de  $N_y(\mu, \sigma^2)$ , que para el caso del grupo 1 será  $N_y(j\omega v, 1)$ , mientras para el grupo 2 se tendrá  $N_y(j\omega v \lambda + m, \lambda)$ . Todo ello permitirá la conversión de (6.167) en integral unidimensional extendida en la frecuencia. Sólo resta obtener los polinomios para los dos grupos:

$$\begin{aligned} \gamma_1(\omega) &= \left(\frac{2}{1+\lambda} + 4\frac{m^2(1+\lambda^2)}{(1+\lambda)^4}\right) v^2 (j\omega)^3 - \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} + \frac{m^2(1+\lambda^2)}{(1+\lambda)^4}\right) 4vm (j\omega)^2 \\ &+ \left(\frac{4m^2(1+\lambda^2) + m^4(1+\lambda^2)}{(1+\lambda)^4} + \frac{4mv(1+\lambda^2)}{(1+\lambda)^3} + \frac{2m^2\lambda}{(1+\lambda)^2} + \frac{2}{(1+\lambda)}\right) (j\omega) \\ &+ \frac{1-\lambda}{1+\lambda} - 2\frac{m^2(1+\lambda^2)}{(1+\lambda)^3} \end{aligned} \quad (6.171)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2(\omega) &= \alpha(\omega) (v^2 \lambda^2) (j\omega)^3 + 2 \left( \alpha(\omega) mv \lambda - 2vm \lambda \left( \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} + \frac{m^2(1+\lambda^2)}{(1+\lambda)^4} \right) \right) (j\omega)^2 + \\ &+ \left( -3\frac{m^4(1+\lambda^2)}{(1+\lambda)^4} + 4\frac{mv\lambda(1+\lambda^2)}{(1+\lambda)^3} - \frac{2m^2\lambda}{(1+\lambda)^2} + 2\alpha(\omega)(m^2 + \lambda^2) \right) (j\omega) \\ &+ \frac{1-\lambda}{1+\lambda} + 2\frac{m^2(1+\lambda^2)}{(1+\lambda)^3} \\ \alpha(\omega) &= 2 \left( \frac{1}{1+\lambda} + 2\frac{m^2(1+\lambda^2)}{(1+\lambda)^4} \right) \end{aligned} \quad (6.172)$$



Obteniendo una integral unidimensional definida en el rango de la frecuencia. Ésta deberá ser calculada numéricamente. Estas expresiones ( 6.171 ) y ( 6.172 ) también son aportaciones de la tesis. Al igual que el sesgo cuadrático, el sesgo lineal será analizado experimentalmente en el apartado 6.5

## 6.3 Método de parametrización de los cluster dos a dos

---

A continuación se presenta un novedoso método de parametrización de los *clusters* basados en transformaciones Box Cox, medidas de Bhattacharyya y valoración a partir del número de muestras que se tiene. En el capítulo anterior se habló de las transformaciones normalizantes, además en el anterior punto, se ha estudiado los efectos de estimación de parámetros con un conjunto de muestras y se ha evaluado el error de Bayes. Sólo resta por mencionar consideraciones sobre la selección de las características, para proceder a explicar el método propuesto. Por lo que se presenta a continuación criterios de diseño sobre la selección de las características para culminar con el *clustering* paramétrico.

### 6.3.1 Reducción de la dimensión: Selección de las características

Uno de los problemas clásicos en Reconocimiento de formas es la reducción de la dimensión del vector de entrada  $X$  desde la dimensión  $L$  a  $M$ , siendo  $M < L$ . Tanto en el Análisis discriminante como en el Reconocimiento de formas, ambos tienen como objetivo buscar filtros que permitan reducir la dimensión del espacio. Una de las ventajas más notables de la reducción del vector, consiste en el diseño de clasificadores más rápidos y menos complejos. La reducción de la dimensión debe ir acompañada del tipo del problema a resolver y del conocimiento a priori que se tenga del modelo. Sea por ejemplo conocida la relación entre dos características del problema concreto, será solo necesario estimar la función de distribución de una de las dimensiones, ya que la otra será obtenida a partir de la estimada, permitiendo eliminar una de las dimensiones. De otro lado, a menor dimensión menor número de muestras es requerido para la generalización. En los trabajos experimentales suele suceder que el número de muestras del universo sea escaso, lo que obligará a buscar subespacios de dimensiones reducidas.

La pregunta de partida es si se puede reducir la dimensión del vector utilizando una muestra del espacio de entrada. La respuesta es "sí", pero siempre y cuando se utilice conocimiento del problema específico.

#### 6.3.1.1 Extracción Versus Selección

La extracción de las características es la reducción del conjunto de medidas que se pueden realizar en la modelización de un estado del problema, y a cada una de ellas se las llamará características. Para obtener esta disminución de la dimensión suele utilizarse estructuras de datos más o menos estándar; por ejemplo en Visión artificial suele utilizarse las medidas de Hu, momentos de inercia, centros de gravedad, áreas, perímetros,.... Algo

más específico es dado por *Han et al*[Han93] que proponen un catálogo de características para la modelización de inspección superficial mediante Visión artificial.

Intuitivamente se puede decir que a medida de que se tenga más conocimiento del problema decrecerá el tamaño del espacio del vector. Así si se desea modelar los defectos superficiales, es seguro que el vector de características a extraer disminuye, si existen direcciones privilegiadas en la formación de las faltas visuales. En definitiva, en la medida de que se parte de mayor grado de información sobre el problema, menor será el vector y el número de muestras necesarias para la representación del universo. Aun más, si no hay lugar para la inserción de conocimiento por parte del experto, no habrá programa de computador. Por lo tanto, el hombre es, hoy por hoy, la mejor fuente de modelos, el cual podrá inferir las relaciones existentes entre las medidas  $x_1, x_2, \dots, x_L$  y conseguir características  $y_1, y_2, \dots, y_M$ ,  $M < L$ .

Desde el punto de vista estadístico, la reducción de la dimensión deberá ser tal que la selección, sea, la mejor familia de funciones bases que permitan proyectar desde el espacio  $L$ -dimensional al  $M$ -dimensional, consiguiendo que el subespacio tomado sea "el mejor" en el sentido de reducir la dimensión y mantener una alta prestación de discriminación. Usualmente, dos o mas clases serán consideradas a la vez, aunque en esta tesis sólo se aborda el enfrentamiento de dos a dos clases, siguiendo con el planteamiento inicial de este capítulo. El nivel de discriminación permitirá caracterizar diferencias entre las clases así como dentro de cada propia clase.

### 6.3.1.2 Seis principios de reducción de la dimensionalidad

En esta sección se presenta seis principios de reducción de la dimensionalidad, que van a suponer el soporte para el método de parametrización propuesto:

1. Los vectores del espacio de medidas,  $X$ , serán utilizados para estimar los vectores y matrices que caractericen la función de densidad del grupo,  $p(X|\omega_i)$ .
2. Si existe la proyección desde  $X \in S_L$  a  $Y \in S_M$ , con  $M < L$ , no es necesario conocer  $p(X|\omega_i)$  sino  $p(Y|\omega_i)$ ; facilitando la estimación de los parámetros que caracterizan la función de densidad. La elección del subespacio será tal que maximice la separabilidad de las funciones de densidad condicionadas.
3. Como alternativa a los dos primeros principios, referentes a la caracterización de las funciones de densidad, este punto hace referencia a que es posible estimar directamente las fronteras de las clases, si se conoce a priori cual es el tipo de frontera entre clases colindantes. Y en el caso de que sea desconocida, en teoría podría ser aproximada por la adecuación de un número finito de hiperplanos.
4. La estimación de las funciones de densidad a partir de un número de muestras es extremadamente difícil. Por lo que se sugiere buscar transformaciones que ayuden a parametrizar el espacio de medida.

5. Las medidas deberán ser de carácter continuo y discreto. Las medidas discretas servirán para generar regiones de estudio; mientras las características continuas serán usadas para la caracterización de las funciones de densidad en estas regiones. Las componentes discretas deberán tener la característica de variar significativamente en el sentido de pasar de una región a otra alejada; en caso contrario, no estaría justificada la componente.

6. Un sexto principio es que las características deben ser obtenidas como relaciones no lineales entre las medidas y aplicables en toda la región de estudio. Estas relaciones actúan estableciendo regiones equivalentes en el espacio de medida.

### 6.3.1.3 Reducción de la dimensión

Existen multitud de técnicas de reducción de la dimensión tal como se discuten, por ejemplo en [Patri72][Raube95]. El origen se encuentra en buscar la transformación de  $S_L$  a  $S_M$ , tal que teniendo  $N_i$  muestras de cada clase, formadas por vectores  $X \in S_L$  al ser mapeados a vectores  $Y \in S_M$ , sean clasificados con mayor rapidez y menor complejidad. En definitiva, el objetivo último de la reducción es mejorar la calidad del clasificador en un compromiso entre la velocidad, generalización y capacidad de discriminación. Bajo estas pautas, las líneas generales en el desarrollo de sistemas de selección de características serán las siguientes:

1. En general, la reducción de la dimensión debe ser local; las transformaciones serán aplicadas a regiones del espacio de observación, raramente se aplicará de forma global. Una región para estos propósitos, se define como el conjunto de puntos de  $X \in S_F$  al que se le aplica la misma transformación de reducción de la dimensión.

2. Las medidas tomadas sobre el espacio de observación al proyectarse desde  $S_F$  a  $S_L$  deben de aumentar las distancias entre las clases. Si las transformaciones de las componente utilizan conocimiento a priori, existe la posibilidad de buscar el marco de transformaciones que aumenta la distancia entre ellas.

3. Para algunas regiones, la reducción de la dimensión puede venir por una simple transformación lineal; por ejemplo, uso de las primeras componentes principales más discriminantes. No obstante, desde el puntos de vista general no serán tan afortunados estos tipos de cambio, recuérdese, por ejemplo, que la distancia de Mahalanobis es invariante ante transformaciones lineales.

4. Las relaciones entre las medidas ( componentes del vector  $X$  ) varían de una clase a otra; esta generalidad puede ser usada para discriminar clases. Apoyando el criterio de búsqueda de filtros no lineales para cada clase.

5. La dimensión de la clase  $i$  transformada será menor al rango de la matriz de covarianza estimada,  $\hat{\Sigma}_i$ , dentro del entorno local concerniente. Esta disminución local de

la dimensión puede ser usada por la clase  $i$  sin pérdida de información. Hay excepciones a esta definición.

6. Las relaciones no lineales entre las componentes de  $X$  pueden proporcionar la eliminación de algunas regiones, permitiendo generar marcos interregionales de discriminación. En definitiva, ciertas regiones obtenidas por el análisis de *clustering*, pueden ser unidas a tenor de las reducciones planteadas y buscar funciones discriminantes con otras regiones colindantes desde una plataforma conjunta.

7. Cuando la dimensión del vector es grande, se puede utilizar un método de reducción basado en subconjuntos de medidas, tal que se destile la correlación entre éstos y genere una jerarquía de disminución de la dimensión.

8. La etapa final estará formada por una cierta distancia,  $d_i(X)$ , sintáctica, estadística, borrosa,..., y un comparador.

Bajo estas reflexiones se propone una metodología de *clustering* paramétrico con selección de las características, mediante transformaciones Box Cox y distancia de Bhattacharyya, esto es, la propuesta busca transformaciones no lineales de subespacios de regiones, tal que sean normales, lo que permitirá su parametrización, y que además tengan el menor error de clasificación a partir del número de muestras.

### 6.3.2 Clustering paramétrico

La modelización de cada uno de los cluster mediante algún tipo de función de densidad conocida puede ser planteada desde las transformaciones Box Cox (ver párrafo 5.3.2). Dichas transformaciones tratan de convertir la distribución de la población en normal. La expresión es :

$$x_{jk}^{\lambda_k} = \begin{cases} \frac{(x_{jk} + m)^{\lambda_k} - 1}{\lambda_k} & \forall \lambda_k \neq 0 \\ \log(x_{jk} + m) & \lambda_k = 0 \end{cases} \quad (6.173)$$

siendo  $x_{jk}$  la muestra  $j$  de la componente  $k$  y  $m$  se elige de forma que para cualquier  $x + m$  sea siempre positivo. Para la determinación del vector  $\Lambda$  hay que maximizar el estadístico  $L$ , siendo  $L(\Lambda) : \Re^n \rightarrow \Re$

$$L_{max}(\Lambda) = -\frac{N}{2} \log |\Sigma^{(\Lambda)}| + \sum_{k=1}^n (\lambda_k - 1) \sum_{j=1}^N \log x_{jk} \quad (6.174)$$

donde  $N$  es el número de muestras,  $n$  la dimensión del espacio y  $\Sigma^{(\Lambda)}$  la matriz de covarianza estimada de las variables transformadas. El procedimiento de localización de  $\Lambda$  óptimo ha sido estudiado por Velilla et al [Velilla94]. No obstante, implican transformaciones diferentes en cada *cluster* y por lo tanto con niveles de medida distintos

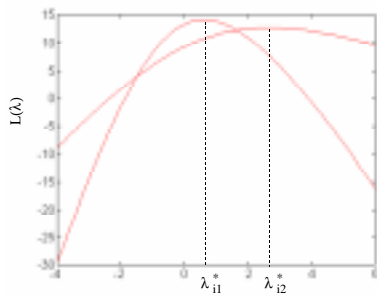
entre ellos. Ante esta tesitura, el planteamiento alternativo consiste en la transformación conjunta dentro de una región determinada, con el objetivo de preservar una medida del espacio acotado que sea común.

El fundamento se basa en las localizaciones de las óptimas transformaciones Box Cox marginales. El sesgo del estimador de las transformaciones,  $L(\Lambda)$ , sigue una  $\chi^2$  con  $n$  grados de libertad (ver párrafo 5.3.6). Este hecho permite buscar cual es la transformación, si existe, capaz de convertir la distribución en los diferentes grupos como normal. La solución será más difícil en la medida de que participe más grupos. Por este motivo, el estudio se ha centrado en la parametrización dos a dos de los *cluster*.

Considerando que sólo hay dos clases,  $c = 1, 2$ , se trata de comprobar la posibilidad de transformación Box Cox común marginal. Sea la característica  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , y llamando  $\lambda_{i1}^*$  y  $\lambda_{i2}^*$  las soluciones óptimas marginales para cada grupo. Es posible definir un  $\lambda_i^*$  común, si cumple que:

$$\begin{aligned} L_{\max}(\lambda_{i1}^*) - \frac{1}{2} \chi_1^2(\alpha_1) &\leq L(\lambda_i^*) \\ L_{\max}(\lambda_{i2}^*) - \frac{1}{2} \chi_1^2(\alpha_2) &\leq L(\lambda_i^*) \\ \alpha_i &> \alpha_c \end{aligned} \quad (6.175)$$

siendo  $\alpha_i$  el índice de confianza, capaz de construir un intervalo para el valor de la función de verosimilitud en el verdadero valor de  $\lambda$ , mientras  $\alpha_c$  implicará el nivel crítico. De otro lado, al tratar con distribuciones marginales  $\chi^2$  será de un grado de libertad.



**Figura 6.6 Localización óptima de  $\lambda$**

correspondiente a:

La localización del óptimo entre las dos distribuciones, es impuesto por la condición de igualdad en los niveles de confianza. No tendría sentido que fuesen distintas ya que significaría aproximarla más a una que a otra en la distribución normal marginal. Sin pérdida de generalidad, sean etiquetados los grupos como 2 y 1 tal que cumplan  $\lambda_{i2}^* > \lambda_{i1}^*$ . Obsérvese que la solución estará en el intervalo  $[\lambda_{i1}^*, \lambda_{i2}^*]$ , y al ser  $L(\lambda_i)$  una función convexa, continua y su derivada también continua,  $L_{\max}(\lambda_{i2}^*) - L(\lambda_{i2})$  es monótona decreciente y  $L_{\max}(\lambda_{i1}^*) - L(\lambda_{i1})$  es monótona creciente, ambas mayor o igual a cero en el intervalo. Implicando una única solución,

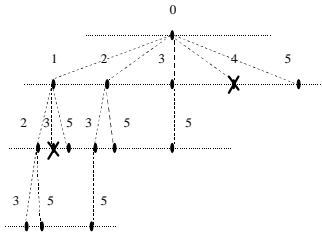
$$\begin{aligned}
L_{max}(\lambda_{i2}) - L_{max}(\lambda_{i1}) = & -\frac{N_2}{2} \ln(\hat{\sigma}_2(\lambda_i^*)^2) + \frac{N_1}{2} \ln(\hat{\sigma}_1(\lambda_i^*)^2) \\
& + (\lambda_i^* - 1) \left[ \sum_{j=1}^{N_2} \ln x_{ji} - \sum_{j=1}^{N_1} \ln x_{ji} \right] \quad \lambda_i^* \in [\lambda_{i1}^*, \lambda_{i2}^*]
\end{aligned} \quad (6.176)$$

siendo  $N_1$  y  $N_2$  el número de muestras de cada cluster

### 6.3.2.1 Selección de las características transformadas

Después de haber localizado las posibles transformaciones marginales en la región, definida por los dos *cluster* de enfrentamiento, se sugiere realizar una primera criba. No todas las componentes tendrán transformación al no cumplir (6.175). Seguidamente es buscado el espacio que cumpla normalidad en los dos *cluster*, maximice la distancia de Bhattacharyya, y la medida tenga mínimo sesgo y varianza, pues dicha medida ha sido determinada por un conjunto de muestras finito.

Aunque la búsqueda del óptimo espacio pudiera parecer explosiva, por ser  $\binom{n}{m}$  combinaciones con  $m = 1, \dots, n$ , al aplicar la condición necesaria, de que cualquier subconjunto debe ser también normal, limitará las posibilidades de exploración. Para el examen de los posibles espacios, ha sido utilizado el algoritmo visto en 5.3.1.3.



**Figura 6.7** Arbol de exploración de espacios normales

El procedimiento genera un árbol de los posibles espacios normales. La figura 6.7 muestra un gráfico de como queda la exploración con una dimensión  $n = 5$ , las aspas indican que no ha pasado el test de normalidad. Los posibles recorridos del árbol desde la raíz hasta cada nivel determinarán las posibles soluciones del espacio. Una buena medida para ahorrar tiempo computacional es ordenar las características de menor a mayor índice de normalidad, llamando 1 a la característica de menor normalidad y  $n$  la de mayor índice marginal de normalidad.

### 6.3.2.2 Distancia de Bhattacharyya, sesgo y varianza

Una vez generado el árbol de los posibles espacios normales de características transformadas, se puede utilizar la distancia de Bhattacharyya como límite superior del error de Bayes:

$$\mu = \frac{1}{8}(M_2 - M_1)^T \left[ \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{2} \right]^{-1} + \frac{1}{2} \ln \frac{\left[ \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{2} \right]}{\sqrt{\Sigma_1 \Sigma_2}} \quad (6.177)$$

El primer y segundo término,  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , miden la distancia entre dos distribuciones debido a las medias y a las covarianzas. Cuando  $M_i$  y  $\Sigma_i$  son determinados mediante un conjunto finito de muestras, el resultado de  $\mu$  difiere de su verdadero valor. Por lo que habrá de calcular el sesgo y la varianza.

Haciendo uso de la metodología expuesta, sobre la influencia del tamaño de las muestras en la distancia de Bhattacharyya, se obtuvo expresiones del sesgo y la varianza para cualquier población normal  $N_1(M_1, \Sigma_1)$ ,  $N_2(M_2, \Sigma_2)$  inferida con  $N_1$  y  $N_2$  tamaños de muestras. Aunque paso previo, y sin pérdida de generalización, las poblaciones deben ser desplazadas y transformadas, tal que las matrices de covarianza sean diagonalizadas a  $I-\Lambda$  (*whitening transformation*), quedando éstas en  $N_1(0, I)$  y  $N_2(M, \Lambda)$ . Con esta distancia, junto al sesgo y la varianza se determinará cual es el óptimo espacio transformado.

## 6.4 Clasificadores no paramétricos: método de aprendizaje supervisado LVQ

---

De entre los métodos no paramétricos se ha estudiado el algoritmo LVQ. La motivación viene dada por la tendencia de colocar hiperplanos de separación en los bordes de Bayes, además de ser un algoritmo basado en aprendizaje mediante muestras. Por lo explicado hasta este punto, este método cognitivo resulta ser interesante pues aun siendo no paramétrico, en su convergencia utilizada hiperplanos tal que tienden a minimizar el error de Bayes. Todo ello conduce a explorar este algoritmo por las motivaciones que lleva esta tesis. De hecho, por los estudios realizados sobre clasificadores paramétricos, se va a llevar a realizar una propuesta de modificación en este algoritmo, perfectamente encuadrado y comprensible por el trabajo realizado.

En este apartado se explica los fundamentos del algoritmo así como su convergencia, para pasar a continuación a mostrar las motivaciones y el desarrollo de las modificaciones propuestas sobre el algoritmo LVQ.

### 6.4.1 Introducción

*Learning Vector Quantization* (LVQ) es una clase de algoritmos de aprendizaje próximos al VQ y al SOM. Mientras VQ y SOM son métodos de aprendizaje no supervisados, LVQ responde al entrenamiento supervisado. Además, a diferencia del

SOM, el algoritmo LVQ en el entrenamiento de los “*codebook vectors*”<sup>3</sup>, no se definen entornos de vecindad alrededor del ganador.

LVQ genera regiones clases dentro del espacio de los datos de entrada, utilizando un subconjunto de *codebooks* etiquetados para cada clase. Las regiones de cuantización, similar a los conjunto de Voronoi en VQ, son definidas por hiperplanos entre *codebooks* vecinos. En definitiva, los bordes de las clases están constituidos por segmentos lineales

#### 6.4.1.1 Teoría de decisión óptima

Como se ha comentado repetidas veces, el problema de la decisión óptima está encuadrada dentro de la teoría bayesiana. Partiendo de un conjunto finito de muestras para cada clase y definiendo las funciones discriminantes como :

$$h_k(X) = p(X | \omega_k) p(\omega_k) \quad ( 6.178 )$$

de manera que ante una nueva muestra, ésta quedará clasificada en la case c utilizando la condición de :

$$h_c(X) = \max_k(h_k(X)) \quad ( 6.179 )$$

Los métodos paramétricos en Reconocimiento de formas, primero intentan modelar el espacio y luego utilizar ( 6.179 ). La filosofía de LVQ es distinta, en una etapa inicial se asignan un subconjunto de vectores a cada clase  $\omega_k$ , y la clasificación se otorga por la mínima distancia euclídea entre una muestra y un *codebook*. Aquí no es importante la aproximación a la función de densidad condicional,  $p(X|\omega_k)$ , sino que el lugar del *codebook*,  $M_i$ , dentro del espacio de los datos minimice el error esperado de clasificación.

#### 6.4.2 Algoritmo LVQ

Suponiendo que estén etiquetados los *codebooks*, la regla de clasificación está basado en la vecindad, pudiendo ser expresado como :

$$c = indice(\min\{\|X - M_i\|\}) \quad ( 6.180 )$$

donde c es la etiqueta patrón de la neurona ganadora, y sólo depende de X y  $M_i$ . Considerando  $X(t)$  una variable aleatoria y  $M_i(t)$  una secuencia de valores  $M_i$  en el dominio discreto del tiempo,  $t = 0,1,2,\dots$ , los valores de  $M_i$  en ( 6.180 ) que minimice el error de

---

<sup>3</sup> Nombre utilizado para los vectores de LVQ



clasificación, se encuentra en los valores asintóticos del proceso de aprendizaje del LVQ. Las ecuaciones que definen la evolución del algoritmo son:

$$M_c(t+1) = M_c(t) + \alpha(t)[X(t) - M_c(t)] \quad \text{Si } X(t), M_c(t) \in \omega_k \quad (6.181)$$

$$M_c(t+1) = M_c(t) - \alpha(t)[X(t) - M_c(t)] \quad \text{Si } X(t) \in \omega_k \text{ y } M_c(t) \in \omega_r \quad (6.182)$$

$$M_i(t+1) = M_i(t) \quad \text{Si } i \neq c \quad (6.183)$$

recibiendo el nombre de LVQ1. Aquí  $\alpha(t)$  es un factor de aprendizaje, comprendido entre 0 y 1. Su función es monótonamente decreciente con el tiempo, siendo recomendado que  $\alpha(t)$  empiece con un valor bastante pequeño, por ejemplo 0.01. No obstante,  $\alpha(t)$  no es crítico, pudiéndose elegir una función decreciente lineal que tienda a cero.

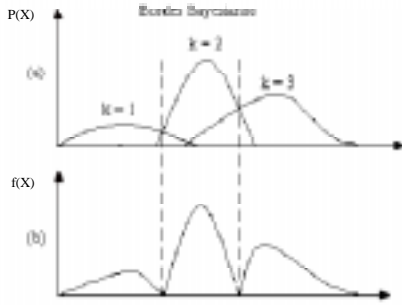
#### 6.4.2.1 Convergencia del algoritmo

La demostración de que el algoritmo tienda a minimizar el error de clasificación es extremadamente difícil. La siguiente exposición se basa en la propiedad del VQ como algoritmo que tiende aproximarse a  $p(X)$ . Si VQ en vez de acercarse a la función de densidad de la variable de entrada,  $p(X)$ , lo hiciera sobre los bordes de Bayes, y las expresiones obtenidas resultaran ser similares a [(6.181)-(6.183)], mostraría la capacidad del algoritmo LVQ de ser un clasificador no paramétrico con mínimo error de clasificación.

Primero habrá que localizar una nueva función de densidad,  $f(X)$ , que sea definida con la condición de tener todos los bordes bayesianos nulos. Por ejemplo, la expresión de abajo cumple con el requisito impuesto :

$$f(X) = p(X | \omega_k)p(\omega_k) - \max_h [p(X | \omega_h)p(\omega_h)] \quad \forall k \neq h \quad (6.184)$$

Donde  $\omega_k$  es la clase ganadora según ( 6.178 ). La Figura 6.8 indica la forma de  $f(X)$  en el caso unidimensional para tres clases. En la parte superior aparecen los bordes bayesianos con líneas a trazos. La función  $f(X)$  es cero en las posiciones frontera, de acuerdo con ( 6.184 ) y en caso contrario cumple  $f(X) > 0$ .



**Figura 6.8 (a) Distribución de las muestras en tres clases. (b) Representación de  $f(X)$**

Al utilizar VQ para aproximar el punto de densidad de  $M_i$  a  $f(X)$ , implica que esta densidad tenderá a cero en todos los bordes de Bayes. Con ( 6.184 ) y VQ se definen los bordes bayesianos con un buen nivel de acierto, dependiendo del número de vectores usados.

Los valores óptimos de  $M_i$ , en el método clásico VQ, se determinarán minimizando el error de cuantización esperado,  $E$ . El gradiente de  $E$ , tal como se vio en 5.1.1.4 es:

$$\nabla_{M_i} E = -2 \int \delta_{ci} \cdot (X - M_i) p(X) dX \quad ( 6.185 )$$

en esta ecuación  $\delta_{ci}$  es el delta de Kronecker, y  $c$  es el índice de  $M_i$  que está más cercano a la muestra de entrada  $X$ . En cada entrenamiento, el *codebook* será modificado de la siguiente manera :

$$M_i(t+1) = M_i(t) - \lambda \cdot \nabla_{m_i(t)} E \quad ( 6.186 )$$

en donde  $\lambda$  define el tamaño del paso, y el valor de la función muestro,  $\nabla_{M_i} E$  en  $t$ , será  $\nabla_{M_i(t)} E = -2\delta_{ci}[X(t) - M_i(t)]$ . Un resultado es obvio de la ecuación ( 6.185 ): sólo el ganador  $M_c(t)$ , debe ser actualizado mientras el resto mantendrán el mismo valor durante el paso.

Si  $p(X)$  en  $E$ , es reemplazada por  $f(X)$ , el gradiente debe ser calculado en dos pasos separados, cuando la muestra  $X(t)$  pertenezca a  $\omega_k$  y en el caso de  $X(t)$  pertenezca a  $\omega_h$ , por la definición de la nueva función de densidad. El gradiente de  $E$ , cambiando  $p(X)$  por  $f(X)$  quedará como:

$$\begin{aligned}\nabla_{M_i} E &= -2 \int \delta_{ci} (X - M_i) f(X) dX = \\ &= -2 \int \delta_{ci} (X - M_i) \left[ p(X | \omega_k) p(\omega_k) - \max_h [p(X | \omega_h) p(\omega_h)] \right] dX\end{aligned}\quad (6.187)$$

Cuando  $X(t) \in \omega_k$ , la función de muestreo de  $\nabla_{M_i} E$

$$\nabla_{M_i(t)} E = -2 \delta_{ci} [X(t) - M_i(t)] \quad (6.188)$$

Si la clase con  $\max_h [p(X | \omega_h) p(\omega_h)]$ , es nombrada con el índice  $r$ , y en el caso que  $X(t) \in \omega_r$ , la función  $\nabla_{M_i(t)} E$  se obtiene con la probabilidad a priori  $p(\omega_r)$  y queda una expresión como la que sigue :

$$\nabla_{M_i(t)} E = +2 \delta_{ci} [X(t) - M_i(t)] \quad (6.189)$$

Reescribiendo la función  $\alpha(t) = 2\lambda$ , se obtienen los siguientes resultados :

$$M_c(t+1) = M_c(t) + \alpha(t) [X(t) - M_c(t)] \quad \text{Si } X(t) \in B_k \text{ y } X(t) \in \omega_k \quad (6.190)$$

$$M_c(t+1) = M_c(t) - \alpha(t) [X(t) - M_c(t)] \quad \text{Si } X(t) \in B_k \text{ y } X(t) \in \omega_r \quad (6.191)$$

$$M_c(t+1) = M_c(t) \quad \text{Si } X(t) \in B_k \text{ y } X(t) \in \omega_h \quad h \neq r \quad (6.192)$$

$$M_i(t+1) = M_i(t) \quad \text{Si } i \neq c \quad (6.193)$$

donde  $B_k$  define la región del espacio de  $\omega_k$  con mínimo error. Si el *codebook*  $M_i$  de la clase  $\omega_k$  estaba ya en la región  $B_k$ , y se tiene en cuenta la forma de la función  $f(X)$  en la Figura 6.8.b), el *codebook*  $M_i \in \omega_k$  debe aproximarse por el método VQ a ser representativo en  $B_k$ , al menos si los pasos de aprendizaje son pequeños.

Cerca del equilibrio, las expresiones ( 6.181 ) a ( 6.183 ) y ( 6.190 ) a ( 6.193 ) tienden a ser similares. No obstante, en LVQ la clasificación se aproxima mediante reglas de cercanía en vecindad, y éstas mejorarán sus prestaciones de clasificación con el aprendizaje. Sin embargo, cuando las muestras están cerca de los bordes de Bayes, el método VQ es diferente a LVQ1. En VQ, existe modificación del *codebook* si  $M_i$  es el segundo más cercano. Pero en LVQ, este efecto es indiferente, los vectores son actualizados en cualquier caso de incorrecta clasificación. Estas diferencias pueden causar pequeños sesgos en los valores asintóticos de  $M_i$  dentro del LVQ1. A razón de este fenómeno, los algoritmos LVQ2 y LVQ3, que serán presentados seguidamente, tienden a parecerse más a VQ en este sentido.

### 6.4.2.2 Optimización del factor de aprendizaje en LVQ1 (OLVQ1)

El algoritmo básico de LVQ1 puede ser modificado en el factor de aprendizaje. La mejora viene al dar diferentes factores de aprendizaje para cada *codebook*, a diferencia del anterior que era común. Las expresiones de ( 6.181 ) a ( 6.183 ) quedan :

$$M_c(t+1) = M_c(t) + \alpha_c(t) [X(t) - M_c(t)] \quad \text{Si } X(t), M_c(t) \in \omega_k \quad (6.194)$$

$$M_c(t+1) = M_c(t) - \alpha_c(t) [X(t) - M_c(t)] \quad \text{Si } X(t) \in \omega_k \text{ y } M_c(t) \in \omega_r \quad (6.195)$$

$$M_i(t+1) = M_i(t) \quad \text{Si } i \neq c \quad (6.196)$$

Para determinar el valor de  $\alpha_c(t)$ , capaz de acelerar el proceso de convergencia, se empezará con redefinir el algoritmo de aprendizaje de la forma :

$$M_c(t+1) = [1 - s(t)\alpha_c(t)]M_c(t) + s(t)\alpha_c(t)X(t) \quad (6.197)$$

donde  $s(t) = +1$  si la clasificación es correcta, y  $s(t) = -1$  en caso contrario. Es evidente que la exactitud estadística del aprendizaje de los *codebook*, vendrá dado por la igualdad de peso en la presentación de todas las muestras. En consecuencia, si las muestras son enseñadas en tiempos diferentes, la corrección debe ir en el sentido de mantener la misma importancia. Obsérvese que  $M_c(t)$  contiene toda la trama de muestras desde  $t$  igual a 1 hasta  $t-1$ . Además,  $M_c(t)$  contiene el vector  $X(t-1)$  escalado, y también tendrá la trama de los valores anteriores debido al termino  $M_c(t-1)$ . En cada uno de los aprendizajes que se llevan a cabo durante el entrenamiento, la magnitud de aprendizaje del vector  $X(t)$  se debe disminuir progresivamente a través del factor  $\alpha_c(t)$ . Así en el mismo momento de actualizar  $M_c(t)$  también habrá decrecido el termino de  $X(t-1)$  por el factor  $[1 - s(t)\alpha_c(t)] \cdot \alpha_c(t-1)$ . Por lo que se puede concluir que estos dos factores que disminuyen progresivamente los valores de  $X$ , deben ser idénticos:

$$\alpha_c(t) = [1 - s(t)\alpha_c(t)]\alpha_c(t-1) \quad (6.198)$$

Si en estas condiciones se hacen para todo  $t$ , por inducción se puede ver que las trazas de los primeros valores han sido escalados de una manera similar que las últimas. El factor de aprendizaje quedará como :

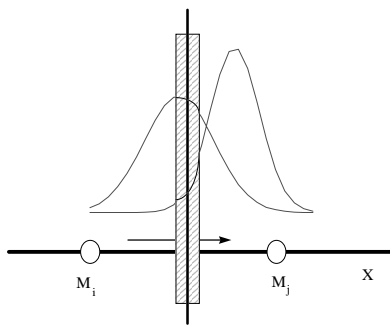
$$\alpha_c(t) = \frac{\alpha_c(t-1)}{1 + s(t)\alpha_c(t-1)} \quad (6.199)$$

Es necesario tener cuidado con el valor de  $\alpha_c(t)$ , porque puede incrementarse, y es importante que no sobrepase en ningún momento el valor de 1. Esta condición es impuesta

por el algoritmo. Para valores iniciales de  $\alpha_i$ , se puede tomar 0.5, pero en muchos casos es mejor tomar un valor próximo a 0.3.

Estas modificaciones que se han llevado a cabo en el algoritmo LVQ1, no pueden ser llevadas en el algoritmo LVQ2, porque este algoritmo no es más que una aproximación parcial de las ecuaciones de VQ, y en caso de aplicar al algoritmo LVQ3, éste debería ser llamado OLVQ3.

### 6.4.2.3 LVQ2



**Figura 6.9 Ilustración de la ventana utilizado en LVQ2 y LVQ3**

El anterior algoritmo puede ser fácilmente modificado para mejorar la filosofía de decisión bayesiana. La forma de clasificar es idéntica que en LVQ1, pero en el aprendizaje, este algoritmo es diferente. Se toman dos codebooks  $M_i$  y  $M_j$ , que estén próximos entre sí y pertenecientes a clases distintas. Inicialmente, parte del espacio de los datos estarán etiquetados incorrectamente. La superficie de separación es siempre definido como un hiperplano entre  $M_i$  y  $M_j$ . Definiendo una ventana simétrica no cero alrededor del este borde, y generando correcciones en  $M_i$  y  $M_j$ , cuando al caer una muestra  $X$  lo haga justamente en el lado incorrecto de la ventana. Estas modificaciones moverán a los *codebooks* y por tanto desplazarán al hiperplano de separación.

En principio, uno de los dos *codebooks* debe pertenecer a la clase correcta, mientras que el otro pertenecerá a una clase diferente. La muestra debe caer dentro de la ventana, que vendrá definida por un ancho  $w$ . Si se denominan  $d_i$  y  $d_j$  a las distancia entre  $M_i$  y  $M_j$  con  $X$  respectivamente, se define la anchura de la ventana,  $w$ , según la siguiente expresión:

$$\min\left(\frac{d_i}{d_j}, \frac{d_j}{d_i}\right) > s \quad \text{en donde} \quad s = \frac{1-w}{1+w} \quad (6.200)$$

normalmente es recomendable utilizar una “ventana” con una anchura de 0.2 o 0.3. Cuando una muestra cae dentro de la ventana se aplicará :

$$M_i(t+1) = M_i(t) - \alpha(t)[X(t) - M_i(t)] \quad (6.201)$$

$$M_j(t+1) = M_j(t) + \alpha(t)[X(t) - M_j(t)] \quad (6.202)$$

donde  $M_i$ ,  $M_j$  son los *codebooks* más próximos a  $X$ , de forma que  $X$  y  $M_j$  tengan la misma etiqueta, y  $X$  y  $M_i$  pertenezcan a clases distintas. La aplicación de las expresiones

( 6.201 ) y ( 6.202 ) hará tender asintóticamente el hiperplano de separación al borde bayesiano

#### 6.4.2.4 LVQ3

El algoritmo LVQ2 está basado en la idea de un desplazamiento de los bordes de decisión hasta el óptimo de Bayes, mientras que no se prestó atención alguna a la posición del *codebook*  $M_i$  a lo largo del proceso. Por lo que parece necesario introducir algunas correcciones que aseguren que  $M_i$  se continúe aproximando fielmente a la función  $f(X)$ . Combinando algunas ideas, se puede obtener un algoritmo mejorado al que se ha llamado LVQ3 :

$$M_i(t+1) = M_i(t) - \alpha(t)[X(t) - M_i(t)] \quad ( 6.203 )$$

$$M_j(t+1) = M_j(t) + \alpha(t)[X(t) - M_j(t)] \quad ( 6.204 )$$

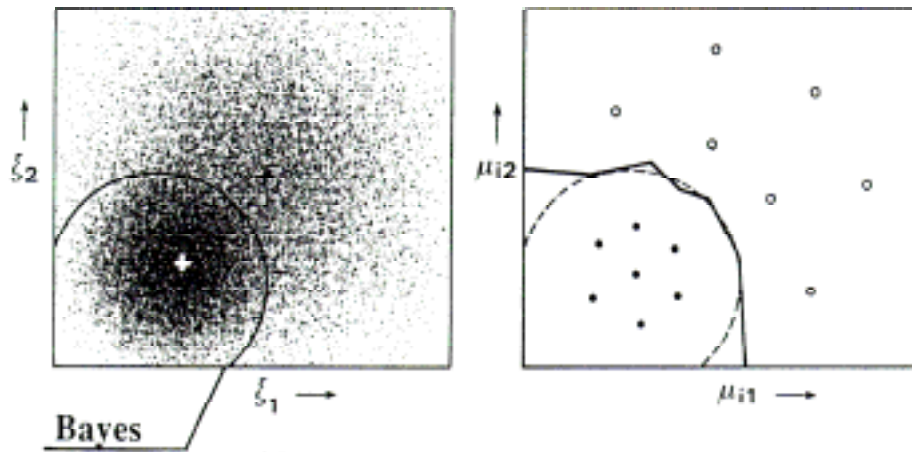
donde  $M_i$  y  $M_j$  son los dos *codebooks* más próximos a la muestra de entrada  $X$ , y  $M_j$  pertenece a la misma clase que  $X$ , mientras que  $M_i$  pertenece a una clase diferente, además  $X$  debe estar contenida dentro de la ventana anteriormente definida. Añadiéndose la ecuación de acercamiento a  $f(X)$  :

$$M_k(t+1) = M_k(t) + \varepsilon \alpha(t)[X(t) - M_k(t)] \quad ( 6.205 )$$

para  $k \in \{i, j\}$ , si  $X$ ,  $M_i$ , y  $M_j$  pertenecen a la misma clase. El valor de  $\varepsilon$  debe estar comprendido entre 0.1 y 0.5, y parece que depende del tamaño de la ventana. Este algoritmo parece que se estabiliza por si mismo, puesto que la localización óptima de  $M_i$  no cambia en un aprendizaje continuado.

### 6.4.3 Modificaciones realizadas en el algoritmo LVQ1

Los distintos algoritmos LVQ vistos utilizan la distancia euclídea para determinar cuál es el *codebook* más cercano. Como consecuencia de este proceder, se obtendrá un clasificador lineal, de manera que la separación entre las diferentes clases vendrán determinadas por un conjunto de hiperplanos. En la figura adjunta se muestra dos poblaciones binormales las cuales son separadas por los vectores del LVQ, que tratan de alinearse alrededor del borde de Bayes.



**Figura 6.10 Separación de dos poblaciones normales mediante LVQ**

Si en vez de utilizar la distancia euclídea se utilizase la distancia de Mahalanobis, un único vector de referencia sería necesario. Se ha pasado del clasificador lineal al cuadrático. Recuerdese el planteamiento anterior de transformaciones normalizantes, por lo que es válido suponer tener regiones de grupos con distribuciones normales. La modificación propuesta es utilizar la distancia de Mahalanobis en vez de la distancia euclídea. Partiendo de la definición de esta medida:

$$d_i^2 = (X - M_i)^T \Sigma_i^{-1} (X - M_i) \quad (6.206)$$

donde  $X$  es la muestra de entrada,  $M_i$  el vector de media del *codebook*, así como  $\Sigma_i$  es la matriz de covarianzas asociada al *codebook*. Tanto el vector de medias como la matriz de covarianzas vendrán definidas por las muestras de entrenamiento.

El algoritmo propuesto tiene la siguiente mecánica, una vez calculada la distancia de Mahalanobis entre la nueva muestra y cada uno de los vectores existentes, habrá de determinar si la muestra de entrada pertenece a la misma clase que el vector ganador, siendo éste aquel de menor distancia de Mahalanobis entre la muestra y el *codebook*. A continuación se pasará a modificar tanto el vector de medias como la matriz de covarianzas asociados al *codebook* ganador. Y de forma similar al OLVQ1, la variación vendrá dada por el parámetro  $\alpha(t)$  que irá decreciendo monótonicamente en el tiempo.

Para la obtención de los algoritmos de modificación del vector de medias y de la matriz de covarianzas, se ha definido el error de cuantización a partir de la distancia de Mahalanobis,  $E$ :

$$E = \int (X - M_c)^T \Sigma_c^{-1} (X - M_c) p(X) dX \quad (6.207)$$

de esta manera se podrá definir:

$$\begin{aligned} M_c(t+1) &= M_c(t) + s(t)\alpha(t)\nabla_{M_c} E(t) \\ \Sigma_c(t+1) &= \Sigma_c(t) + s(t)\alpha(t)\nabla_{\Sigma_c} E(t) \end{aligned} \quad (6.208)$$

donde  $s(t)$  es +1 cuando coinciden las etiquetas entre la muestra y el vector y -1 en caso contrario. Haciendo uso del anexo de derivadas parciales sobre funciones potenciales [Fukun90], y considerando que la mejor aproximación del gradiente en la muestra  $t$  es la distancia de Mahalanobis, quedará como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(t)}{\partial M_c} &= (\Sigma_c^{-1}(t) + \Sigma_c^{-1}(t))M \quad M = X(t) - M_c(t) \\ \frac{\partial E(t)}{\partial \Sigma_c} &= -(\Sigma_c^{-1}(t)(MM^T + (MM^T)^T)\Sigma_c^{-1}(t) - \text{diag}(\Sigma_c^{-1}(t)(MM^T)\Sigma_c^{-1}(t))) \end{aligned} \quad (6.209)$$

El valor del parámetro  $\alpha(t)$ , así como su ley de decrecimiento es muy importante y crítico en la convergencia de este algoritmo. Como ley de decrecimiento de  $\alpha(t)$  se ha tomado la siguiente:

$$\alpha(t+1) = \begin{cases} \frac{\alpha(t)}{1+\alpha(t)} & \text{si la muestra está clasificada correctamente} \\ \frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)} & \text{si la muestra está clasificada incorrectamente} \end{cases} \quad (6.210)$$



## 6.5 Aplicación a la clasificación de defectos locales en planchas de aluminio colado

---

Las técnicas comentadas han sido implementadas en la clasificación de defectos locales en planchas de aluminio colado. Partiendo de los resultados experimentales del capítulo 5, se ha procedido de la siguiente forma:

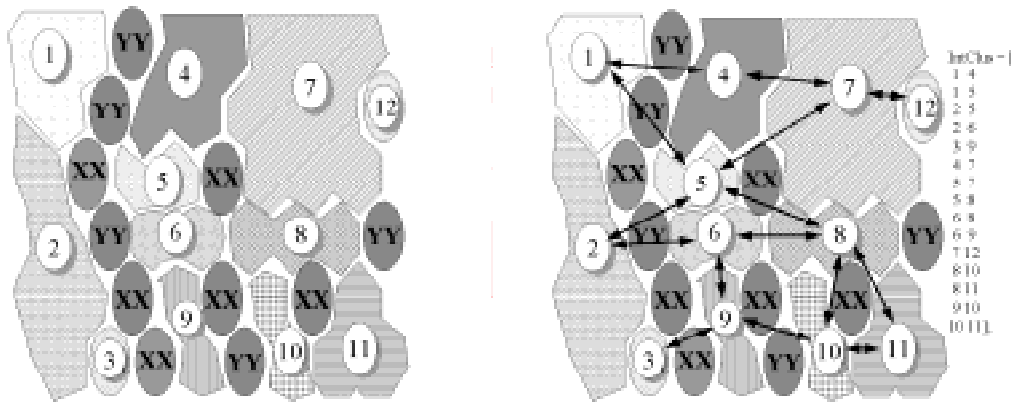
1. Parametrización dos a dos de los *clusters* según método presentado en 6.3.
2. Diseño de los clasificadores paramétricos a partir de los resultados obtenidos en el anterior punto y según se vio en 6.1 y 6.2.
3. Experimentos de convergencia del algoritmo modificado OLVQ y diseño de los clasificadores no paramétricos según este algoritmo.
4. Comparación de los métodos presentados con otras técnicas tradicionales de clasificación.

A continuación se presentan los resultados del trabajo experimental.

### 6.5.1 Parametrización dos a dos de los *cluster* según método presentado en 6.3

Tras la obtención de los *clusters* mediante las técnicas de análisis exploratorio de los datos visto en el anterior capítulo y basado en los mapa de Kohonen, las U-Matriz, la descripción de los patrones, y los subespacios normales, se paso a la parametrización y selección de las características. Los resultado del análisis de los datos queda reflejado en la figura 6.11. En el mapa aparecen 12 grupos distintos; las neuronas etiquetadas con XX son aquellas en las que no ha sido posible inferir información estadística, por el bajo número de muestras activadas en la neurona. Mientras, las etiquetas YY corresponden con neuronas confusas, coexistiendo muestras de diferentes clases.

De este análisis de los datos se da un enfrentamiento de dos a dos de los *clusters*, tal que son vecinos pero les corresponden etiquetas distintas de tipos de defectos (ver figura 6.11.b). Seguidamente se pasó al método propuesto como sigue: Eliminación de la componentes discretas, esta operación se hizo mediante la meda, tal como se vio en 5.4.2. Posteriormente se paso a una preselección de las variables continuas con el método univar [Guine91] y manova [Coole71]. Los test de normalidad fueron realizados con el contraste de Shapiro, con niveles de significación mayores a 0.25. Aceptándose la normalidad con la condición de distribuciones marginales proyectadas sobre componentes principales y cumpliendo la desigualdad de Bonferroni.



**Figura 6.11 a) Grupos obtenidos después de aplicar el método *Cluster*: 1- Bandas transversales oscuras pequeñas, 2- Bandas transversales oscuras medianas, 3- Manchas oscuras, 4- Arañazos, 5- Bandas longitudinales oscuras medianas 6- bandas longitudinales oscuras grandes, 7- Faltas de material, 8 - Faltas de material grande, 9- Cristalización anormal I 10- Cristalización anormal II 11- Pegado de rodillos, 12- Bandas brillantes. b) Enfrentamiento entre *clusters* adyacentes**

El cuadro 6.1 muestra un ejemplo del método, aplicado a la región comprendida entre los *cluster* 6-9. Después de haber eliminado las componentes sin información estadísticas y haber hecho la preselección de las variables restantes, se localizan las transformaciones Box Cox marginales tanto del *cluster* A como B.

<b>Clases consideradas</b>
6 9
<b>Variables a considerar (meda)</b>
4 11 1 3 5 2 17
<b>Valor del criterio (Univar)</b>
0.76 0.32 0.13 -0.27 -2.16 -22 -28
<b><math>\lambda</math> marginales para A:</b>
10 -4.33 6.96 9.99 -8.97 9.99 9.99
<b>Variables Eliminadas (por bajo <math>\alpha_c</math>):</b>
3 17
<b><math>\lambda</math> marginales para B:</b>
-4.48 -0.44 -2.2 4.24 -9.99
<b>Variables Eliminadas (por bajo <math>\alpha_c</math>):</b>
<b><math>\lambda^*</math> "optima"</b>
1.96 -0.89 0 6.21 -5

**Cuadro 6.1**

Del cuadro se desprende que las componentes 4, 11, 1, 5 y 2 tienen transformaciones marginales Box Cox comunes, cuyas  $\lambda$  óptimas son 1.96, -0.89, 0, 6.21 y -5 respectivamente. A continuación se pasa a la búsqueda de subespacios comunes de normalidad para ambos grupos, según el árbol exploratorio de subespacios normales visto en 5.3.1.3. Al final quedará un conjunto de subespacios transformados y normales, de los cuales serán seleccionados aquellos que tengan mayor distancia de Bhattacharyya, con menor sesgo y varianza a partir del número de muestras que se

tenga para la región, tal como se vio en 6.3. Los resultados pueden ser contemplados en la tabla 6.1:

**Tabla 6.1**  $\alpha_i$  índice de confianza,  $\varepsilon$  error superior de Bayes,  $\mu$  distancia de Bhattacharyya,  $\Delta\mu$  y  $\text{Var}(\mu)$  sesgo y varianza de la distancia

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\varepsilon(\%)$	$\mu$	$\Delta\mu_1$	$\Delta\mu_2$	$\text{Var}(\mu_1)$	$\text{Var}(\mu_2)$	Componentes
0.44	0.96	2.68	2.84	0.38	0.03	1.22	0	4
0.65	0.58	1.55	3.39	0.61	0.31	1.44	0.02	4 11
0.78	0.58	19.3	0.87	0.09	0.03	0.08	0.02	11
0.46	0.37	2.98	2.74	0.34	0.04	1.04	0.007	1
0.54	0.95	0	10.7	1.41	0.03	13.3	0	5

Para el resto de los *clusters* es aplicado igual método, resultando la siguiente tabla 6.2 :

**Tabla 6.2** Resultados del método de *clustering* paramétrico

Clases consideradas	$\lambda$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\varepsilon(\%)$	$\mu$	$\Delta\mu_1$	$\Delta\mu_2$	$\text{Var}(\mu_1)$	$\text{Var}(\mu_2)$	Componentes
1-4	-0.87	0.32	0.46	0.17	5.57	0.44	0.01	2.43	0.01	5
1-5	-1.69	0.33	0.46	0.15	5.77	0.85	0.01	4.79	0	5
2-5	-0.50	0.32	0.48	0.13	5.83	0.55	0.02	3.28	0	5
2-6	0.63	0.67	0.43	8.98	1.53	0.11	0.04	0.18	0.02	4
3-9	2.52	0.67	0.96	3.51	2.44	0.89	0.01	2.05	0	5
4-7	1.45	0.34	0.67	0.77	4.15	0.21	0.01	0.95	0	5
5-7	1.08	0.41	0.62	0.34	4.88	0.33	0.02	1.64	0.01	4
5-8	-6.10	0.55	0.40	11.7	1.38	0.30	0.04	0.52	0	4
6-8	2.06	0.45	0.43	0	8.95	3.91	0	28.11	0.04	2
6-9	1.96	0.44	0.96	2.68	2.84	0.38	0.03	1.22	0	4
7-12	-0.92	0.88	0.42	11.6	1.25	0.15	0.02	0.26	0	9
8-10	5.38	0.56	0.87	3.61	3.61	1.2	0.06	3.98	0.02	9
8-11	6.09	0.31	0.40	22.4	0.78	0.14	0.02	0.08	0.04	4
9-10	3.73	0.97	0.48	0.53	4.37	1.02	0.04	4.09	0	5
10-11	-6.18	0.94	0.54	9.77	1.59	0.78	0	0.97	0.04	12

### 6.5.2 Diseño de los clasificadores paramétricos

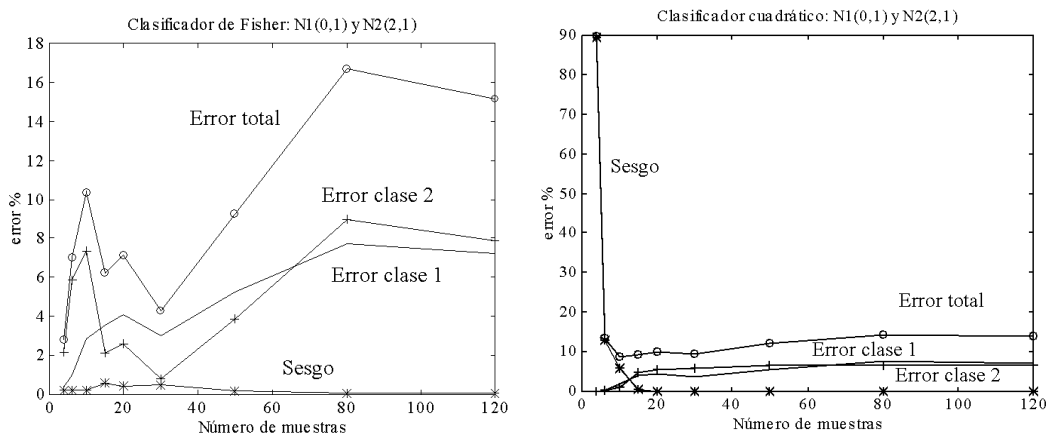
Una vez parametrizado el espacio para cada uno de los dos grupos enfrentado, se pasa al diseño tanto de los clasificadores cuadráticos como lineales, cuyas expresiones paramétricas corresponden a:

$$h(X) = \frac{1}{2}(X - M_1)^T \Sigma_1^{-1}(X - M_1) - \frac{1}{2}(X - M_2)^T \Sigma_2^{-1}(X - M_2) + \frac{1}{2} \ln \frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_2|} - \ln \frac{p(\omega_1)}{p(\omega_2)} \quad (6.211)$$

$$h(X) = (M_2 - M_1)^T \bar{\Sigma}^{-1} X + \frac{1}{2}(M_1^T \bar{\Sigma}^{-1} M_1 - M_2^T \bar{\Sigma}^{-1} M_2) \quad (6.212)$$

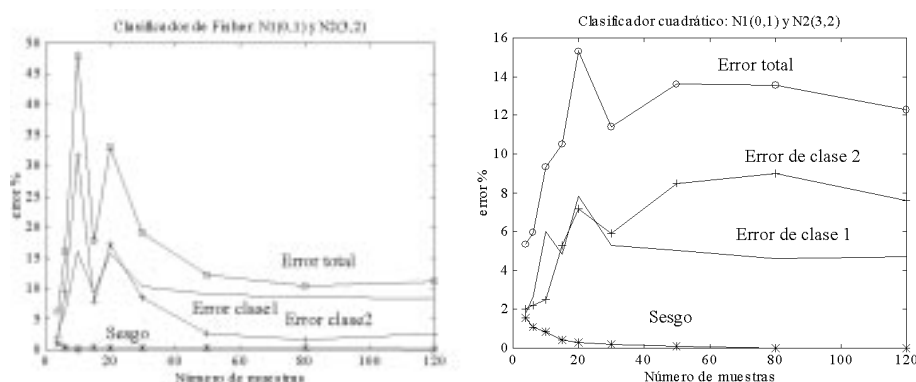
La primera referente al cuadrático y la segunda a un clasificador lineal de Fisher. Para cada clasificador local, tanto cuadrático como lineal, se calcular su error utilizando el método visto en 6.1.2.1. De la misma manera y haciendo uso del método presentado en 6.2.2 se calcula para ambos el sesgo producido, como consecuencia de las estimaciones realizadas a partir de un conjunto finito de muestras. Pero antes de entrar en los resultados para el diseño de los clasificadores paramétricos del aluminio, se debe verificar las conclusiones obtenidas en los apartados 6.1.2.1, 6.2.2.1 junto a 6.2.2.2 sobre los cálculos del error y de los sesgos para dos poblaciones normales I- $\Lambda$ . Con tal fin se va a realizar un conjunto de experimentos relacionados con los procedimientos esgrimidos para el cálculo del error y del sesgo.

El primer experimento consiste en calcular el error y el sesgo de dos poblaciones normales en donde se va incrementando el número de muestras de ambas. Se inicia con dos grupos de dimensión unidimensional y de varianza unitaria, separadas sus medias en dos unidades, esto es,  $N_1(0,1)$  y  $N(2,1)$ , colocándose la condición de igualdad de probabilidad para ambos grupos,  $p(\omega_1) = p(\omega_2) = 1/2$ . Desde el punto de vista teórico, los errores de Bayes coinciden tanto en el clasificador lineal como en el cuadrático, además de corresponder para estas condiciones con igual error en cada grupo,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 7,935\%$ , luego el error total será de  $15,87\%$ . Las muestras en ambos grupos van creciendo por igual y son valores aleatorios tomados de las dos normales. Los resultados de aplicar los procedimientos vistos de cálculo del error y del sesgo son mostrados en la figura 6.12.



**Figura 6.12 Error y sesgo para poblaciones normales de igual varianza**

Mostrando la validez del cálculo del error y la tendencia del sesgo a disminuir con el número de muestras. El segundo experimento es similar al primero, pero esta vez se utiliza dos poblaciones de covarianzas distintas. Se trata de dos poblaciones normales con  $N_1(0,1)$  y  $N_2(3,2)$ , manteniendo el mismo número de muestras para cada grupo. El error de Bayes para el clasificador cuadrático será de 5.375% tanto para el primer grupo como para el segundo. Mientras en el clasificador lineal el error de primer grupo es de 3.345% y el del segundo es de 7.23%. La figura 6.13 muestra los resultados de la evolución del error y el sesgo con el número de muestras.



**Figura 6.13 Error y sesgo para poblaciones normales de distinta varianza**

La tercera prueba ha consistido en comparar los resultados de aplicar el método para la determinación del sesgo según las propuestas recogidas en esta tesis, con las expresiones analíticas (6.148) y (6.166) referentes al sesgo de clasificadores cuadráticos y lineales para poblaciones normales I-I. La validación vienen dada entre los resultados dados por el cálculo numérico para el caso específico de I-I con las expresiones analíticas. A continuación se muestran las pruebas realizadas respecto a la distancia entre grupos de covarianza unidad y separado sus medias en M:

**Tabla 6.3 Sesgo cuadrático, comparación entre la expresión analítica (6.148) y el método de 6.2.2.1**

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(6.148)	0.0935	0.0605	0.0654	0.0574	0.0351	0.0151	0.0047	0.0011	0.0002	0.0001
6.2.2.1	0.0935	0.0605	0.0654	0.0574	0.0351	0.0151	0.0047	0.0011	0.0002	0.0000

**Tabla 6.4 Sesgo lineal, , comparación entre la expresión analítica (6.166) y el método de 6.2.2.2**

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	0.0440	0.0605	0.0486	0.0270	0.0110	0.0033	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000
B	0.0440	0.0605	0.0486	0.0270	0.0110	0.0033	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000

Por último, la tabla 6.5 muestra los resultados obtenidos tanto de error como de sesgo para clasificadores paramétricos cuadráticos como lineales.

**Tabla 6.5 Resultados de los clasificadores paramétricos tanto cuadráticos como lineales: Box Cox ( $\lambda$ ), error de Bhattacharyya, error cuadrático estimado, sesgo cuadrático estimado, error cuadrático, error lineal estimado, sesgo lineal estimado, error lineal**

Clases consideradas	$\lambda$	$\epsilon_s(\%)$	$\epsilon_q(\%)$	$\Delta\epsilon_q(\%)$	$\epsilon_{qt}(\%)$	$\epsilon_l(\%)$	$\Delta\epsilon_l(\%)$	$\epsilon_{lt}(\%)$
1-4	-0.87	0.17	1.79	-	-	3.34	2.20	5.55
1-5	-1.69	0.15	4.86	-	-	0.47	0.25	0.72
2-5	-0.50	0.13	0.70	0.03	0.73	0.34	0	0.34
2-6	0.63	8.98	11.76	-	-	28.48	0.18	28.66
3-9	2.52	3.51	4.17	-	-	18.21	0.07	18.28
4-7	1.45	0.77	35.10	5.26	40.37	29.86	0.08	29.95
5-7	1.08	0.34	10.06	-	-	0.16	2.37	2.53
5-8	-6.10	11.7	26.85	0.86	27.72	30.52	0.64	31.16
6-8	2.06	0	3.34	-	-	7.16	1.89	9.06
6-9	1.96	2.68	1.96	0.40	2.37	0.75	0.26	1.02
7-12	-0.92	11.6	12.67	0.41	13.09	17.08	0.28	17.37
8-10	5.38	3.61	32.64	0.56	33.21	31.14	0.27	31.42
8-11	6.09	22.4	12.73	-	-	0.47	52.28	52.76
9-10	3.73	0.53	23.29	0.16	23.45	40.22	0.04	40.26
10-11	-6.18	9.77	12.95	-	-	41.14	0.21	41.35

Las rayas indican que el sesgo calculado para el clasificador cuadrático era muy elevado, por lo que no se hace factible su construcción. Obsérvese la viabilidad de los clasificadores lineales de Fisher ante los cuadráticos, éstos se muestran más robustos con el número de muestras utilizados, conclusión también esbozada con las componentes de la distancia de Bhattacharyya, ya que predominaba el efecto de  $\mu_1$  respecto a  $\mu_2$ . Las discrepancias entre el error superior de Bhattacharyya y los calculados numéricamente son debido a que la distancia de Bhattacharyya considera que las probabilidades de los grupos enfrentados son iguales,  $p(\omega_1) = p(\omega_2)$ , y que el máximo se da a  $s = 0.5$ , ver 6.1.2.2.

### 6.5.3 Modificación del algoritmo no paramétrico OLVQ

Con el objeto de comprobar el correcto funcionamiento de las modificaciones realizadas sobre el algoritmo LVQ, se realizaron una serie de pruebas para confirmar el correcto funcionamiento del mismo.

Con este propósito se particularizo el estudio para el caso unidimensional, ya que sus expresiones resultan fáciles de analizar. De esta manera, las expresiones de aprendizaje quedan como:

$$m_c(t+1) = m_c(t) + s(t)\alpha(t) \frac{x - m_c(t)}{\sigma_c^2(t)} \quad (6.213)$$

$$\sigma_c^2(t+1) = \sigma_c^2(t) + s(t)\alpha(t) \left( \frac{x - m_c(t)}{\sigma_c^2(t)} \right)^2 \quad (6.214)$$

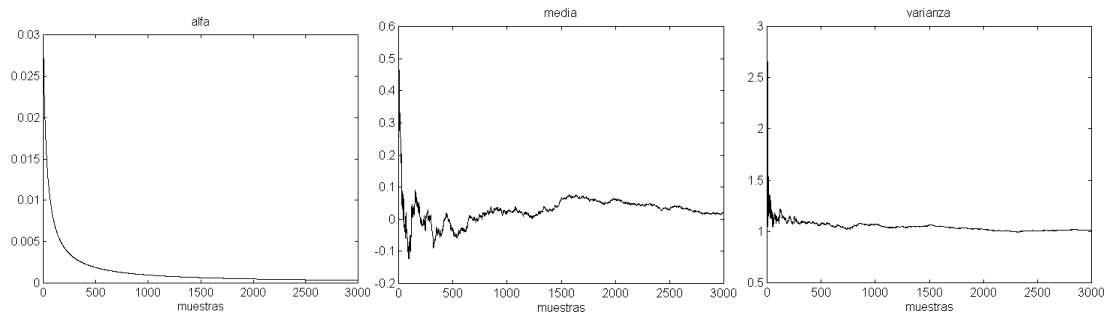
donde  $s(t)$  es +1 si coinciden las etiquetas de las muestras con los vectores de aprendizaje y  $s(t)$  es -1 en caso contrario. Para el análisis del algoritmo propuesto se estudia el efecto de la convergencia considerando una sola neurona y un sólo grupo. Para el caso de mantener constante la varianza, la regla de actualización correspondería al OLVQ1. Mayor atención se precisa sobre la evolución de la covarianza. Si se estudia la convergencia de la expresión (6.213) para el caso de un único grupo, se desprende que la variación de  $\sigma_c^2$  con el tiempo es monótonamente creciente con independencia del tipo de distribución del *cluster*. Efecto que muestra la falta de convergencia del algoritmo. Ante esta evidencia se propone efectuar la siguiente modificación:

$$\sigma_c^2(t+1) = \frac{1}{N(t)} \left( \sigma_c^2(t)(N(t)-1) + r(t)(x - m_c(t))^2 \right) \quad (6.215)$$

siendo  $r(t)$  +1 en el caso de pertenecer la muestra al grupo y 0 en caso contrario. Esta nueva expresión viene avalada por la propia definición de varianza, donde se ha tomado la media según (6.213) como la mejor estimación de ésta en el instante  $t$ .

Otro aspecto estudiado son los valores iniciales de las medias y las covarianzas. Según las pruebas realizadas a partir de poblaciones normales y uniformes, el algoritmo converge partiendo de valores aleatorio. Sin embargo, se ha observado que si los valores iniciales son tomados según las medias y covarianzas de la población de aprendizaje de cada grupo, el número de iteraciones requeridos para la convergencia disminuye.

A continuación se presenta algunos de los experimentos realizados. El primero consiste en observar como ante una población normal de media cero y covarianza uno, la neurona converge partiendo de valores aleatorios.



**Figura 6.14** Convergencia del algoritmo propuesto para una población normal  $N(0,1)$ .

Otros de los experimentos realizados es la comparación de los resultados de clasificación entre los paramétricos y los no paramétricos. Con tal propósito se va a ver el error de clasificación para dos poblaciones con distribución normal y con distribución uniforme. Para los clasificadores paramétricos se ha utilizado el cuadrático de ( 6.211 ) y el lineal de ( 6.212 ), cuyos parámetros han sido estimados con una población de 1000 muestras para cada grupo. Estas poblaciones también sirvieron para el entrenamiento de los algoritmos OLVQ y el propuesto.

Para la fase de test se dispuso de 3000 muestras para cada grupo y cada tipo de función de distribución. En la tabla 6.6 muestra el número de muestras mal clasificadas respecto a las 6000 totales para cada uno de los clasificadores.

**Tabla 6.6** Comparación de los diferentes clasificadores para dos grupos con distribuciones normales y uniformes

Clasificador	$N_1(0,1)-N_2(1,1)$	$N_1(0,1)-N_2(1,1)$	$U_1(0-1)U_2(1-2)$	$U_1(0,1)-N_2(0,3)$
Cuadrático	1824	1	13	1536
Lineal	1824	13	7	1001
OLVQ	1848	12	13	1222
Propuesto	1869	1	48	1194



#### 6.5.4 Comparación con otras técnicas tradicionales de clasificación

En la evolución temporal del proyecto para la detección y clasificación de los defectos locales en el aluminio colado, se trabajó en la confección de un sistema híbrido, esto es, la conjunción de diferentes técnicas de Inteligencia artificial para la clasificación de patrones[Kanal92]. Las razones venían avaladas por varios motivos, necesidad de exactitud en la clasificación y el tiempo para la clasificación no era crítico, por lo que se pudo intervenir con distintos caminos para el reconocimiento, en este caso se utilizó uso de redes neuronales MLP y LVQ, además de sistemas basados en reglas. Esta actitud permitió con posterioridad facilitar el proceso de comparación entre las diferentes técnicas de clasificación, tanto las tradicionales como las aquí propuestas.

La búsqueda de subsistemas de clasificación con características complementarias hizo elegir las técnicas a emplear. La estructura de información basadas en primitivas (ver 5.4) aconsejaba el uso de gramáticas de libre contexto, por tanto se diseñó un bloque basado en reglas de producción y además se abrió una línea de trabajo de diseño de reglas con antecedentes borrosos[Plate94][Ruiz92]. Artículos con características parecidas a la solución de este problema abogaban por el uso de redes neuronales de retropropagación[Sikka92]. Además se utilizó el algoritmo LVQ por ser un clasificador próximo a Bayes. De esta etapa de análisis salió como resultado el primer nivel de clasificación, formado por:

1. Sistemas basados en reglas. Uso de gramáticas de libre contexto para cada tipo de defecto.
2. MLPs con algoritmos de aprendizaje de retropropagación por su capacidad de generalización.
3. Red LVQ por ser un clasificador basado en el vecino más cercano.

En un estadio superior de clasificación se encontraba un supervisor neuronal que elaborara la conclusión definitiva, implementado por un MLP con algoritmo de retroalimentación. Esta red supervisora se alimentaba de las salidas de los tres anteriores clasificadores. Los resultados que se obtuvieron fueron muy buenos, tal como se expresa en las tablas 6.7 y 6.8, por lo que también servirán para ser comparados con los algoritmos propuestos. No obstante, no existe una expresión del sesgo tal como se ha utilizado en los clasificadores paramétricos

**Tabla 6.7 Resultados a cinco defectos**

Tipo defecto	MLP	LVQ	Sintáctico	Supervisor	Paramétrico
Pegado de rodillos	88	87.5	100	100	80.8
Faltas de material	86	95.5	100	100	82.5
Bandas longitudinales	100	95	100	100	86.6
Bandas transversales	97	100	94	94	88.6
Cristalización anormal	89	66.7	68	68	77.5

**Tabla 6.8 Resultados a ocho tipos de defectos**

Tipo defecto	MLP	LVQ	Sintáctico	Supervisor	Paramétrico
Pegado de rodillos	88	75	88	88	80
Bandas brillante	100	100	100	100	82.6
Falta de material pequeño	86	94.7	100	100	82.5
Falta de material grande	83	0	66	66	83
Bandas longitudinales	84	88.9	68	68	90.8
Arañazos	72	54.5	100	100	82.5
Bandas transversales	97	100	94	94	88.6
Cristalización anormal	89	66.7	68	68	77.5

## 6.6 Conclusiones

Se ha presentado el desarrollo de un nuevo modelo de parametrización, selección de las características y clasificación, en las que se considera tanto el número de muestras cómo el error de clasificación, y en la que se favorece la inserción de conocimiento a priori. El modelo se apoya sobre un análisis exploratorio de los datos, el cual fue recogido en el capítulo 5.

El nuevo método se basa en la parametrización de dos clusters enfrentados entre sí con etiquetas distintas. La región definida por ambos grupos es transformada a un subespacio, con las características de normalidad para cada grupo y en menor error de Bayes posible, atendiendo al número de muestras. Para ello, se busca la transformación Box Cox óptima marginal, de la que se aprovecha la utilización del intervalo de confianza para la característica transformada en los dos *clusters*, localizando el  $\lambda$  óptimo común. A ello le acompaña la distancia de Bhattacharyya, que determina un límite superior del error de Bayes. Esta información será utilizada para determinar el subespacio común más discriminante. Pero no sólo se utiliza la distancia, sino que además se calcula el sesgo y la varianza de la medida, con el objeto de conocer la validez de la medida considerando el número de muestras. Además, orientará el diseño hacia clasificadores lineales o cuadráticos, según el valor de  $\mu_1$  o  $\mu_2$ .

Una vez que han sido determinadas las parametrizaciones de los grupos, se pasa al diseño de los clasificadores, de los que también se ha trabajado en la localización del error y de su sesgo. Se han obtenido expresiones analíticas tanto de los parámetros del clasificador como del error y del sesgo, todo ello para grupos que tienen distribuciones normales I- $\Lambda$ , siendo éstas algunas de las aportaciones de esta tesis.

A tenor del trabajo realizado se plantea la modificación del algoritmo no paramétrico LVQ. Un estudio sobre este método cognitivo concluye que los codebooks tienden a situarse en la frontera de Bayes, mediante uso de hiperplanos, los cuales se presentan como clasificadores lineales. Si en vez de utilizar la distancia euclídea se utiliza la de Mahalanobis, es posible el paso de clasificadores lineales a cuadráticos. Esta modificación ha sido estudiada.

Por último, el trabajo experimental ha estado basado en la clasificación de defectos locales en el aluminio colado. Este problema ha servido como bancada de trabajo para el diseño de los clasificadores, tanto de técnicas tradicionales como las propuestas aquí recogidas. Las conclusiones obtenidas muestran que el método propuesto ayuda a introducir conocimiento a priori, haciendo los clasificadores más exactos y generalistas que aquellos basados tanto en reglas como en ejemplos. La explicación viene dada por el hecho de tener expresiones analíticas que muestran con objetividad las características de cada subespacio en función del error y del número de muestras del universo. Obviamente este proceder no puede ser dado por los métodos tradicionales. Aunque los métodos leave-one-out o holdout son límites superiores de error, éstos no opinan sobre el sesgo del error, esto es, no consideran el número de muestras. Tampoco buscan por sí mismos la selección de las características.

# 7

## Aplicaciones industriales de la tesis

---

En el devenir de esta tesis se han implementado dos SIVA industriales. El primero por orden cronológico y en el periodo comprendido del 92 al 96, se trabajó en el diseño de un SIVA aplicado al aluminio colado. Y el segundo, elaborado en el plazo transcurrido del 97 al 98, se ha centrado en la determinación de defectos locales en la pasta de papel. Ambos proyectos han servido de bancada para el trabajo experimental y en el fragor de estos desarrollos nacieron las motivaciones que han sido presentadas a lo largo de esta tesis. Por eso, este capítulo tiene como objetivo mostrar los resultados a modo de aplicaciones industriales. Presentándose en primer lugar el SIVA diseñado para el aluminio colado y luego el SIVA realizado para la pasta de papel

### 7.1 Inspección visual del aluminio colado

---

El SIVA que se muestra a continuación ha sido desarrollado dentro del proyecto *BRITE Euram 4336, On line Quality Control of Cast Aluminum Alloys*, y éste se encuentra instalado en la factoría de COMSAL del grupo ALUMIX, en Portovesme, Cerdeña, Italia.

### 7.1.1 Proceso de obtención del aluminio colado

El proceso de obtención de planchas de aluminio comienza a partir del aluminio fundido, con algunas de las siguientes aleaciones:

Al 1050A (Al, 0.25% Si, 0.40% Fe)

Al 8079 (Al, 0.25% a 0.30 Si, 0.70 a 0.90% Fe)

Al 3030 (Al, 0.25% Si, 0.40% Fe)

La aleación, se mantiene en el horno a una temperatura entre 690°C y 710°C, y se hace descender del mismo, por gravedad, hasta los cilindro del moldeo ( *caster* ) en donde, por contacto, solidifica a una temperatura entre 200°C y 270°C, adoptando la forma de una plancha de 7 mm de grosor y un ancho entre 1500 y 1670 mm que se bobina en unidades de hasta 40 toneladas. La plancha así obtenida es laminada posteriormente, en etapas sucesivas, para obtener láminas de aluminio de diferentes grosores, hasta un espesor mínimo de 5 micras.

El proceso de moldeo (*casting*) se ha optimizado hasta el punto de llevarse a cabo en una línea totalmente automatizada, que incluye mezcladores de aleación, tolvas de llenado, horno, desgasificador, rodillos de moldeo, y sección de enrollado. El moldeo es controlado desde una estación de trabajo, denominada supervisor, en la cual se ajustan los parámetros del proceso, que incluyen, como los más significativos, la temperatura del horno, el flujo del aluminio fundido hacia la boquilla de alimentación de los cilindros, la velocidad de los cilindros de moldeo, la presión relativa entre los cilindros de moldeo, la temperatura de entrada y salida del agua que refrigera los cilindros de moldeo, el par de tracción que ejerce la bobinadora y los niveles de gas en el aluminio fundido.

Desde el supervisor se monitoriza el estado de los parámetros y es posible establecer valores de consignas para los mismos, que son transferidos al proceso de moldeo mediante un controlador programable multitarea, capaz de conducir el proceso en función del modelo asignado. Sin embargo, la única tarea realizada por operadores humanos es la de inspección del producto, constituida por las siguientes operaciones:

1. Espesor de la plancha. A este efecto, se toman medidas periódicas con micrómetros y se lleva un registro por bobina producida. Se toman aproximadamente 100 medidas en las secciones laterales y central de la plancha.
2. Acabado superficial. Se necesitan conocer las variaciones de rugosidad de la superficie. Se clasifica en acabado fino, esto es, rugosidad media superficial de 50 micras, acabado normal (75 micras) y acabado basto, superior a 75 micras. El acabado fino, consigna deseable, se produce con los rodillos de moldeo recién reparados y en condiciones óptimas de lubricación. En situaciones de acabado basto es necesario advertir a los operarios del moldeo que verifiquen

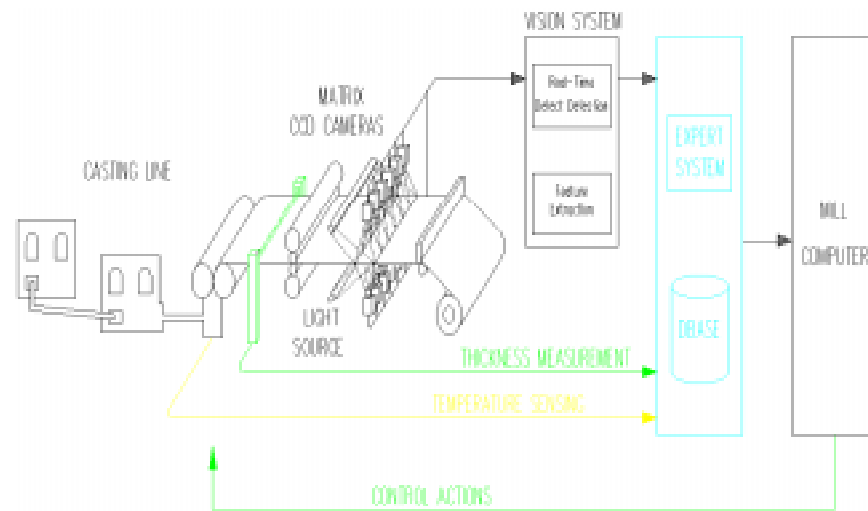
las causas y, o bien cambien los cilindros, o bien se ajuste el sistema de lubricación. El acabado superficial se evalúa analizando muestras obtenidas periódicamente, seccionando la plancha y haciendo un estudio de rugosidad de la superficie fuera de línea.

3. Presencia de defectos en la superficie de la pancha por ambas caras. Es necesario detectar los defectos de la superficie, pues condicionan el destino de la bobina en cuanto al nivel de laminación a que puede someterse (a mayor calidad, mayor nivel es posible de laminación) o, en su caso, la baja calidad de la bobina hará que se la destine de nuevo al fundido. Estos defectos se detectan por inspección visual de la pancha de aluminio y su temprana detección permitirá actuar adecuadamente sobre los parámetros de la línea, indicados en el epígrafe anterior.
4. Temperatura con la cual la superficie de aluminio abandona los cilindros de moldeo. La temperatura con la que la plancha abandona los rodillos de moldeo, junto con su uniformidad en la sección transversal, condicionan las propiedades mecánicas de la misma, fundamentales éstas para el posterior proceso de laminado. La temperatura se verifica periódicamente por contacto de doce puntos a lo largo del perfil transversal de la plancha.

De esta realidad nace el mencionado proyecto europeo, con vocación de automatizar la inspección del proceso. A tal fin, se propone el sistema de control llamado *Qualicast*, y que se muestra en la figura 7.1. Éste consta de dos grandes bloques funcionales:

1. Sistema de inspección no destructivo. Compuesto por un sistema de inspección visual automatizado, para la detección y análisis de defectos visuales y determinación del acabado superficial; un sistema de infrarrojos, para la obtención del mapa de distribución de temperatura de la superficie y un sistema de corrientes inducidas, para la determinación del espesor de la plancha de aluminio.
2. Sistema supervisor, formando por un sistema experto, el cual decide tanto la calidad de la plancha de aluminio producida, como las acciones correctoras que son necesarias de efectuar ante anomalías detectadas.

De estos dos bloques funcionales, sólo se ha participado en la construcción y diseño del SIVA. Por lo que se presenta a continuación los resultados del SIVA implementado.



**Figura 7.1 Sistema de control Qualicast**

### 7.1.2 SIVA aplicado a las planchas de aluminio colado

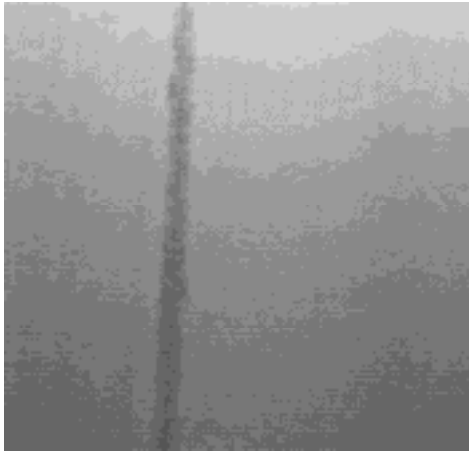
Las tareas de inspección visual se efectúan para verificar el acabado superficial y para detectar las faltas locales en las planchas, como ha sido comentado anteriormente. Se muestra a continuación el catálogo de defectos críticos en la aplicación, junto con una fotografía de la apariencia típica.



**Figura 7.3 Plancha sin defecto.**



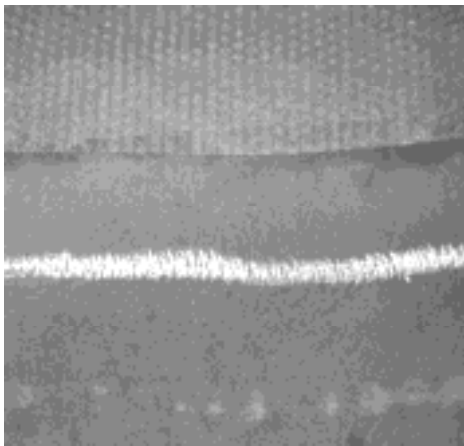
**Figura 7.2 Inclusión de gas. Líneas finas brillantes de 0.5 mm de grosor típico.**



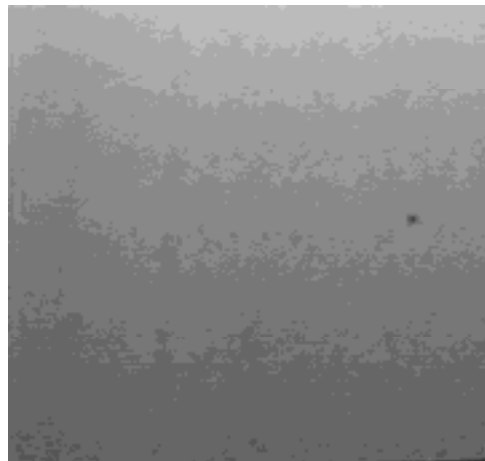
**Figura 7.7** Cristalización anormal. Bandas opacas longitudinales con espesores desde 1 mm hasta varios cm.



**Figura 7.6** Faltas de material. Desconchones en la plancha desde 1 mm<sup>2</sup> hasta varios cm<sup>2</sup>.



**Figura 7.5** Pegado. Manchas claras debido a la alteración de la superficie, junto con zonas más oscuras originadas por alabeo de ésta.



**Figura 7.4** Grafito. Puntos oscuros de 0.5 a 3 mm de radio.

Las especificaciones para el diseño del sistema de inspección visual automatizada, incluyen:

1. Funcionamiento en línea. Inspección de la plancha de dimensión transversal entre 1500 y 1670 mm, por ambas caras, producida a una velocidad de 2m/min.
2. Mínima dimensión de defecto a detectar: 1 mm<sup>2</sup>, lo cual exige una resolución mínima de 2 píxeles por milímetro en ambos sentidos, longitudinal y transversal.



3. Detección del acabado superficial y de los defectos locales con inspección del 100%.
4. Clasificación de las faltas en línea

Si bien el SIVA además de la detección de los defectos debe determinar el acabado superficial, este último objetivo no ha sido tratado en esta tesis. Para una mayor información sobre este asunto ver [Fernán97]. A parte de este aspecto, la implementación del SIVA para el aluminio colado está constituido por los tres grandes bloques: formación de imágenes, detección de los defectos y clasificación de los defectos.

#### 7.1.2.1 Formación de imágenes

Los defectos en superficies metálicas se caracterizan por alteraciones en la estructura superficial. Puesto que los defectos que aparecen en las superficies metálicas suponen una deformación material de las misma, la observación de la componente especular de la luz reflejada da como resultado la detección de defectos locales. Debido al alto coeficiente de reflexión de la luz superficial del aluminio se convierte en necesidad diseñar un sistema de iluminación adecuado.

Atendiendo a los criterios vistos en el capítulo 3, se optó por baterías de cámaras CCD matriciales entrelazadas como las más apropiadas para la aplicación, principalmente por dos razones: la velocidad máxima no supera los 2 m/min, lo que permite tener tiempos de integración hasta 50 ms, junto con una escena de iluminación cuasi uniforme en bandas transversales, debido a la iluminación planar transversal. La resolución utilizada fue de 2 pixel/mm, y el tamaño de buffer procesado era de 478 x 501, cubriendo una superficie de 291 mm en la dirección del tren laminado por un ancho de 376 mm. La figura 7.8 muestra la disposición de cámara - iluminación - superficie.



**Figura 7.8 Formación de imágenes en la inspección del aluminio**

#### 7.1.2.2 Detección de los defectos

Una vez obtenida la imagen del aluminio, ésta se procesa para encontrar los defectos. Para la localización de defectos se realiza un análisis local, pues debido a la textura y al tipo de iluminación utilizada no es posible un enfoque global, aunque esta línea de trabajo fue intentada, realizando operaciones morfológicas acompañadas de umbralizaciones globales, obteniendo resultados similares pero con mayores tiempos de computación[Plate92].

La alta rugosidad del aluminio origina en la imagen que píxeles con niveles altos aparecen entremezclados con otros más bajos. Algunos defectos no producen una variación significativa en los valores absolutos de nivel de gris, sino que producen una alteración en la distribución espacial de los mismos, por lo que se dio el siguiente procesamiento a la señal. Previo al procesamiento se adquiere la imagen con la mínima apertura del diafragma y con el máximo nivel de contraste en la digitalizadora, manteniendo el máximo rango dinámico de medida y sin saturaciones. Algoritmos basados en el análisis textural fueron desarrollados para la detección de los defectos [Fernán94], aunque el exceso de tiempo computacional los han descartado en la implementación final. Según las conclusiones sobre procesamiento de imágenes en tiempo real [Lee90], se admite que los métodos de detección basados en parámetros estadísticos de primer y segundo orden son los óptimos para las aplicaciones de Visión artificial. El algoritmo usado se basa en considerar que la distribución de niveles de grises en una franja transversal depende sólo de la materia del producto, esto es, se considera cuasi uniforme la iluminación por filas; por lo que se aplica un filtro binomial 3x3 y un umbral local. Se considera un píxel procesado,  $g_{m,n}$ , no defectuoso aquel que cumpla:

$$m_{m,n} - u_i \leq g_{m,n} \leq m_{m,n} + u_s \quad ( 7.1 )$$

siendo  $m_{m,n}$  la media del entorno 3 x 3 colocado en  $m,n$ , y  $u_i$  y  $u_s$  las cuantías de niveles de grises alrededor de la media sin considerarlo defectuoso. Las etapas de procesamiento y segmentación son mínimas, filtrado binomial y comparación de umbrales locales, según la expresión ( 7.1 ). El resultado definirá tres tipos de categorías: píxeles no defectuosos, píxeles defectuosos con apariencia oscura y píxeles defectuosos con tonalidad clara. La ausencia de defectos en las imágenes segmentadas propiciará la renovación de los estadísticos,  $m_{m,n}$ , con el fin de eliminar errores producidos por las variaciones de luz en la escena con el transcurso del tiempo. En la tabla 7.1 se muestran los resultados de la detección según las conclusiones de Fernández [Fernán97].

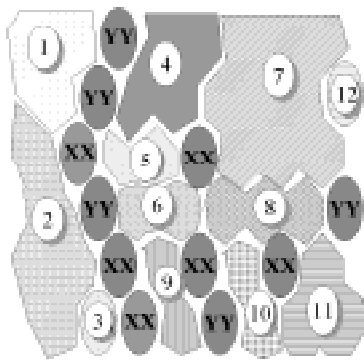
La presencia de píxeles defectuosos originará una etapa posterior de etiquetamiento de objetos, en claros y oscuros. En el caso de que el número de objetos etiquetados fuera excesivo, se pasará a aumentar el rango alrededor de la media, es decir, se modificará  $u_i$  y  $u_s$ . La experiencia ha demostrado que la identificación de los objetos no requiere de un número abultado de objetos, pues la representación de éstos mantiene características espaciales bien diferenciadas. Por tanto, la umbralización es local y de carácter dinámico.

**Tabla 7.1 Resultados de la detección de defectos en el aluminio**

Tipo de defecto	%detección
Inclusión de grafito (Bandas oscuras)	100%
Faltas de material	100%
Pegado de los rodillos	100%
Cristalización anormal	100%
Inclusión de gas (Bandas brillantes)	98.7%

El sistema físico de procesamiento de imágenes ha sido desarrollado específicamente para esta aplicación. Se trata de un sistema autónomo diseñado por la empresa SECAD, uno de los socios del proyecto BRITE. El *hardware* se basa en uno o dos DSP IGOR para el tratamiento de imágenes y un procesador principal RISC AMD29240 a 50 MHz. Para la implementación de los algoritmos se utiliza el compilador cruzado *High-C* o *Cygnus C*. Como características a destacar se diría que tiene tres canales CCIR o RS170, procesamiento a 16 Mpíxeles por segundo, 4 entradas y 4 salidas TTL, líneas serie RS232 y RS423, y por supuesto, su bajo precio en comparación con arquitecturas basadas en PC o en estaciones de trabajo.

### 7.1.2.3 Clasificación de los defectos



**Figura 7.9 Grupos de los defectos del aluminio:** 1- Bandas transversales oscuras pequeñas, 2- Bandas transversales oscuras medianas, 3- Manchas oscuras, 4- Arañazos, 5- bandas longitudinales oscuras medianas, 6- bandas longitudinales oscuras grandes, 7- Faltas de material grande, 8 - Faltas de material grande, 9- Cristalización anormal I, 10- Cristalización anormal II, 11- Pegado de rodillos, 12- Bandas brillantes

La clasificación de los defectos locales en el aluminio ha servido de bancada para los trabajos experimentales abordados en los capítulos 5 y 6, refiriéndose al análisis exploratorio de los datos y a la clasificación de patrones estáticos. En ambos capítulos queda constancia de las técnicas implementadas. A modo de resumen se diría que una vez segmentada la imagen y etiquetados los objetos, se hace una representación de los defectos mediante la aplicación de métodos sintácticos (ver 5.4.1), éstos sirven para la utilización de clasificadores basados en reglas así como para la obtención del vector de características. A partir de este vector se pasa a un análisis de los datos mediante los mapas auto

organizados, las U-Matriz, la descripción de los patrones y la búsqueda de espacios normales, cuyos resultados puede verse en la figura 7.9.

Uno de los mayores inconvenientes en la clasificación de los defectos del aluminio era la falta de muestras sobre el universo del problema, en total se contaba con sólo 157 faltas registradas, lo que supone un handicap importante. Por eso se ha hecho tanto hincapié en la selección de las características y en la capacidad de generalización de los clasificadores, midiéndose el error de clasificación y su sesgo a partir del número de muestras obtenidas. Para la clasificación de los defectos se ha utilizado un sistema híbrido, constituido por una red neuronal MLP y otra LVQ más un clasificador sintáctico. Los resultados de estos tres sistemas eran entregados a una MLP supervisora que daba la decisión definitiva. Por último, la tabla 7.2 muestra los resultados de la clasificación del sistema híbrido que a su vez es comparada con las prestaciones dadas por los clasificadores paramétricos. Las conclusiones de estas tablas pueden ser vistas en 6.5.

**Tabla 7.2 Resultados de la clasificación de defectos**

Tipo defecto	MLP	LVQ	Sintáctico	Supervisor	Paramétrico
Pegado de rodillos	88	87.5	100	100	80.8
Faltas de material	86	95.5	100	100	82.5
Bandas longitudinales	100	95	100	100	86.6
Bandas transversales	97	100	94	94	88.6
Cristalización anormal	89	66.7	68	68	77.5

Tipo defecto	MLP	LVQ	Sintáctico	Supervisor	Paramétrico
Pegado de rodillos	88	75	88	88	80
Falta de material pequeño	86	94.7	100	100	82.5
Falta de material grande	83	0	66	66	83
Bandas longitudinales	84	88.9	68	68	90.8
Arañazos	72	54.5	100	100	82.5
Bandas transversales	97	100	94	94	88.6
Bandas brillante	100	100	100	100	82.6
Cristalización anormal	89	77.8	68	68	77.5

## 7.2 Inspección visual de la pasta de papel

---

Este SIVA ha sido implementado para la cadena de producción de pasta de papel de la empresa ENCE, ubicada en la provincia de Pontevedra.

### 7.2.1 Proceso de obtención de la pasta de papel

El proceso de fabricación consta básicamente de las etapas siguientes: almacenamiento de madera, descortezado, digestión, tamizado, lavado, deslignificación con oxígeno, lavado, blanqueo, secado, embalaje y almacenamiento.

La materia prima utilizada para la fabricación de la celulosa es madera de eucalipto. Al llegar es descortezada por vía seca, en tambores descortezadores, y se astillan los troncos. Las astillas son tamizadas para mejorar su calidad y su utilización en el proceso de cocción y reducir pérdidas de fibras. Antes de la digestión, las astillas son tratadas con vapor e impregnadas con lejía blanca. La digestión tiene lugar a unos 170°C y a una presión de 8 kg/cm<sup>2</sup>, y en ella se produce la separación de las fibras por disolución de la lignina en el licor de cocción. La digestión no es suficiente para eliminar toda la lignina sin destruir la fibra, esto se consigue en las etapas posteriores de blanqueo. Después de la digestión, la pasta es tamizada y lavada. Para conservar las propiedades de rendimiento y resistencia de la pasta, se termina la cocción cuando se alcanza un contenido de lignina alrededor de un 3%. Antes del blanqueo, se procede a la deslignificación con oxígeno extrayéndose casi el 50% de la lignina restante. Las materias orgánicas e inorgánicas disueltas en la etapa de oxígeno son enviadas a la recuperación de productos químicos y utilizadas para producir energía. La deslignificación con oxígeno reduce así la carga del efluente final del blanqueo. La pasta procedente del lavado se blanquea según el tipo de producto a producir, habiendo tres formas distintas. Éstas son: OXY con cloro gas, dióxido de cloro y sosa cáustica, representa el proceso convencional, aunque con un menor consumo de reactivos debido a la deslignificación con oxígeno; ECF con dióxido de cloro, oxígeno y agua oxigenada; y TCF utilizando productos sin cloro, como oxígeno, agua oxigenada, ozono y peroxiácidos. Antes de proceder a su secado, la pasta blanqueada se somete a una depuración final, para eliminar los materiales extraños y mejorar su limpieza y calidad.

### 7.2.2 Inspección de la pasta de papel

La calidad de la pasta de papel depende de su blancura, su limpieza y otras características de producción y almacenamiento. Además este control se efectúa mediante técnicas de muestreo, haciéndose necesario por el volumen de pasta producido que puede alcanzar hasta las 280.000 toneladas/año. La calidad es determinada en línea por selección de planchas del lote, aunque es contrastada en laboratorio con un menor número de muestras.

La aplicación desarrollada se centra en determinar la limpieza en pasta según la norma 404 de ENCE. Esta norma tiene como objeto definir la limpieza de pasta como mm<sup>2</sup> de superficie de impurezas por kilogramo de pasta seca. A tal fin se deposita la muestra de

papel ante una exposición de luz transmitida y se cuenta manualmente las impurezas visibles. La composición química de las impurezas no es un factor determinante a la hora de clasificar la limpieza de la pasta de papel. La mota de suciedad se cuantifica únicamente por su tamaño, y se da el valor en  $\text{mm}^2$  de área de impurezas por kilogramo de pasta de papel.

Sin embargo, que en la pasta de papel no se tome en cuenta de que sustancia se compone las impurezas, no quiere decir que no sea importante distinguir los distintos tipos. Fundamentalmente hay dos formas básicas de impurezas: impurezas de tipo *pitch*, procedentes de suciedad en general, esto es, de la que cae en la pasta de papel durante el proceso de producción ( por ejemplo, la grasa de las máquinas que están en contacto durante el tamizado, secado, etc.); e impurezas de tipo *shive*, su composición es básicamente celulosa ( cuando las astillas no se disuelven totalmente durante los diferentes procesos de transformación quedan atrapadas en el interior de la pasta en forma de pequeñas motas ). Si bien hay otros tipos de impurezas sus frecuencias son muy reducidas y éstos no han sido consideradas. De otro lado, los defectos tipo *pitch* son más comunes que los *shives*, los primero representan casi el 96 % de las impurezas totales.

Estos dos tipos de defectos son fáciles de diferenciar a simple vista por su color: los defectos tipo *pitch* tienen un color negro intenso, mientras que los *shives* son anaranjados, aunque en algunos casos se traten de un naranja muy oscuro. La razón de que tomen este color vienen de que estos últimos en realidad son pequeñas astillas de madera incrustadas dentro de la pasta. Por otra parte, los defectos tipo *shive* suelen ser de un gran tamaño.

La presencia de los *pitch* es mucho más perjudicial para la calidad final de la pasta que los *shives*, dado que la pasta de papel se usa como materia prima en procesos siguientes, en los que los *shives* son fáciles de disolver y los *pitch* no. Y como en la determinación de la limpieza de la pasta se mete a todos en el mismo grupo, es importante tener control del número de defectos de cada tipo que se encuentran. Sin embargo, dado que la presencia de defectos tipo *shive* es relativamente baja, no se hace imprescindible la determinación de la clase a la que pertenece.

El procedimiento a seguir versa de la siguiente manera, el inspector humano coge una plancha de pasta de papel de 740 x 820 mm, y lo expone a trasluz con una potencia de iluminación de 756 W, teniendo una intensidad lumínica alrededor de unos 31.000 luxes. El área iluminada y por tanto de inspección es de 500 x 500  $\text{mm}^2$ , lo que viene a significar que no se inspecciona la totalidad del pliego. Esta operación se efectúa por ambas caras de la hoja. El inspector visual marca las impurezas y en función de su tamaño le asigna una categoría, que puede



Figura 7.10 Inspección visual humana

ser de tipo P, C, B y A. Estas categorías son reflejadas en la tabla 7.3. Debido a las limitaciones visuales humanas en cuanto a la métrica, el inspector humano asigna una de estas etiquetas en función del tamaño que cree tener el defecto, lo que evidencia un cierto nivel de subjetividad. El operario, a su buen juicio, determinará una etiqueta según estime en que rango de dimensión de área es la impureza (ver tabla 7.3). Una vez etiquetadas todas las impurezas localizadas en ambas caras, cuenta el número de defectos tipo P, C, B y A, ponderando cada clase por el valor de área asignada, según se indica en la tabla. De este proceder se saca la superficie total defectuosa que junto con el gramaje de la hoja determinará el nivel de limpieza en pasta .

**Tabla 7.3 Clasificación de los defectos en la pasta de papel**

Tipo de defecto	Área de las impurezas(mm <sup>2</sup> )	Área asignada al defecto(mm <sup>2</sup> )
-	Menores a 0.04 (no se encuentran)	-
P	Entre 0.04 y 0.1	0.04
C	Entre 0.1 y 0.3	0.1
B	Entre 0.3 y 0.8	0.3
A	Mayores a 0.8	1

### 7.2.3 SIVA implementando para la limpieza de la pasta de papel

Atendiendo a la norma 404 de ENCE, relativa a la determinación de la limpieza en los pliegos de papel, se ha efectuado el diseño de un SIVA para esta tarea. Dicha labor consiste en determinar la limpieza de pasta de papel en mm<sup>2</sup> de superficie defectuosa por kilogramo de pasta. Con tal propósito se inspecciona un pliego y se busca visualmente las faltas locales. Para su automatización se ha construido la máquina que se ilustra en la figura 7.11. El usuario alimenta al sistema con pliegos de pasta de papel que pueden ir de 740 a 750 mm longitudinales, y de 820 a 840 mm transversales, dimensiones dadas según las dos cortadoras utilizadas en la fábrica. No obstante, el rango en la máquina puede ser mayor. Una

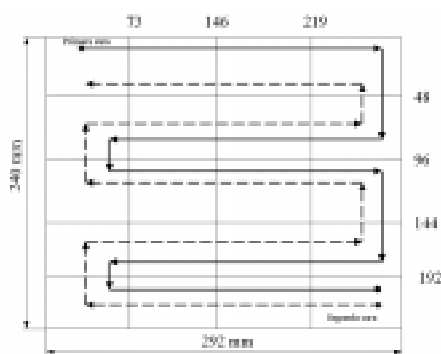


**Figura 7.11 SIVA para la pasta de papel**

vez introducido el pliego, la máquina determinará el nivel de limpieza del pliego efectuando una inspección sobre una superficie de  $280320 \text{ mm}^2$ . Esta operación se efectúa por cada cara de manera independiente.

La arquitectura de la máquina está constituida por una mesa X-Y que desplaza el papel ante el sistema de adquisición de imágenes. Este modelo fue optado al ofrecer más garantías que mover solidariamente el binomio cámaras luces. Por dos motivos, primero, el pliego de papel junto con su soporte cristalino, ofrece menor par mecánico que el desplazamiento de cámaras y luces, y en segundo lugar, resulta más difícil el diseño mecánico que garantice en el movimiento una traslación mimética entre las cámaras y las luces, cuestión vital para obtener una escena SIVA de iluminación uniforme. Por contra, este modo de actuar implica una mayor dimensión del bastidor de la máquina, al producirse un desplazamiento del papel, pero éste es razonablemente pequeño, de 192 mm en dirección X y 219 mm en dirección Y.

La mesa X-Y sigue una trayectoria óptima de inspección, minimizando el tiempo que tarda en la determinación de la limpieza en la pasta. La figura 7.12 muestra el recorrido efectuado en filas y columnas de 73 y 48 mm respectivamente. La mesa es manipulada por dos motores de continua de 80 W, uno por cada eje. Cada motor lleva asociado una reductora, calculada según el par mecánico y la trayectoria de desplazamiento, y de relación 1:98 para el eje X y 1:68,2 para el eje Y. El control de los motores es efectuado por una tarjeta de potencia de configuración en puente y control por modulación del ancho del pulso (PWM), junto con una tarjeta de control insertada en una ranura ISA del PC. El modelo de esta tarjeta es SMCC-01 de KELVIN. Como lazo de realimentación utilizan un encoder de 2000 pulsos por vuelta. Y por cada eje se ha implementado un regulador PD digital. Las trayectorias de desplazamientos se caracterizan por perfiles trapezoidales de velocidad y parabólicos de posicionamiento. Además a la mesa se le ha añadido un circuito eléctrico de seguridad, capaz de desconectar la fuente de alimentación de los motores en caso de pérdida de control por parte del programa informático de inspección.



**Figura 7.12 Trayectoria de inspección**

Se ha optado por cuatro escenarios paralelos por las siguientes razones: al usar una batería de cámaras entrelazadas supone que los movimientos de la mesa van a ser paso a paso, por las razones esgrimidas en el capítulo 3 y que luego serán comentadas en 7.2.3.1. Esto significa que se adquieren las imágenes y mientras se procesan éstas, se desplaza la mesa a la siguiente posición. Se observó que los mayores tiempos de la inspección se dedicaban al movimiento de la mesa. Al ser actividades asíncronas y en paralelo, se pretendía que el programa informático tuviera más información entre cada desplazamiento, lo que además suponía reducir el número de desplazamientos para cada inspección. De otro lado, el número de cuatro cámaras viene dado por el número de canales multiplexados que



tiene la digitalizadora utilizada, junto con una disposición geométrica adecuada para las trayectorias seguidas por la mesa. Este proceder a supuesto una reducción drástica del tiempo dedicado a la inspección de un pliego, próximo a los 42s. Aun así, el mayor cuello de botella sigue siendo la mecánica. El algoritmo de inspección sin desplazamientos mecánicos tarda tan sólo 11.7 s.

La aplicación informática corre sobre Windows95, con código a 32 bits y con operaciones MMX para el procesamiento de imágenes. La aplicación está disponible para migrar a NT4.0. La elección de Windows95 fue debida a que en un principio las librerías suministradas por el fabricante de las tarjetas de control sobre motores eran de 16 bits, lo que obligó a un diseño de 32 bits en toda la aplicación, excepto para el control de los motores que se realizaba bajo código de 16 bits. No obstante, el conocimiento sobre diseño de dispositivos de control (*drivers*) tanto en NT como en Windows95, hizo posible posteriormente que toda la aplicación se ejecutase en código a 32 bits.

El SIVA implementado sigue la filosofía de esta tesis en cuanto a sus bloques funcionales. Existe un diseño propio tanto para la formación de imágenes como para la detección de los defectos. En cambio, no aparece un bloque específico de clasificación de los defectos por las razones esgrimidas en 7.2.2, esto es, al ser mayoritarios los defectos de tipo *pitch* respecto a los *shives*, no hay necesidad de distinguirlos. Además sólo interesa la superficie total defectuosa, independientemente del tipo de defecto o de tamaño. Aunque esta afirmación lleva matizaciones tal como se ha comentado anteriormente. En todo caso, la máquina al detectar las impurezas, y en función de su tamaño le asigna una etiqueta tipo P, C, B o A. Sin embargo esta catalogación es de carácter informativo, pues lo importante es la suma total de área defectuosa para luego convertirlo en limpieza en pasta. Seguidamente se expone la formación de la imágenes en el SIVA y cómo se detectan los defectos.

### 7.2.3.1 Formación de imágenes

La iluminación de la escena es de luz transmitida, además para poder aplicar una umbralización global se precisa que sea uniforme en el campo de inspección de cada cámara, esto es, la luz debe ser cuasi uniforme en una superficie de 73 x 48 mm. Otro inconveniente añadido, es el hecho de tener no sólo una escena sino cuatro a la vez, lo que supone acoplamientos lumínicos entre ellas. A tal fin, se han diseñado pantallas de separación lumínica evitando las interferencias entre los diferentes focos. Su diseño fue tratado en el capítulo 3, donde se aborda la colocación de los focos respecto a la superficie así como la disposición de las pantallas.

Por otro lado, las características de los focos son también especiales. Se requería un foco de tipo direccional, uniforme y potente.

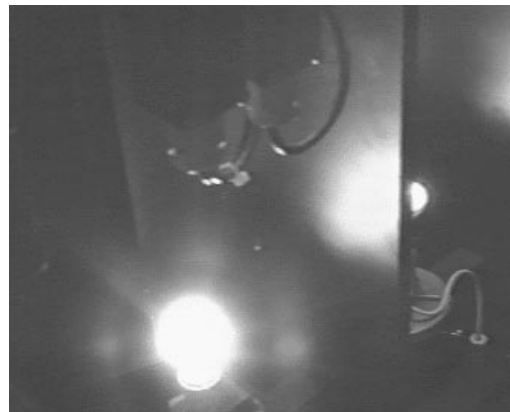


Figura 7.13 Sistema de iluminación

Direccional porque la dirección de la escena es invariante, uniforme para poder aplicar algoritmos de umbralización global y potente porque se necesitaba mucha energía lumínica para atravesar la pasta de papel. Recuérdese que el operario utiliza una iluminación de 31.000 luxes. En las pruebas experimentales y para los sensores elegidos, la iluminación necesaria oscila por encima de los 12.000 luxes. Por todas estas características se eligió una novedosa clase de lámparas de halogenuros metálicos de PHILIPS, modelo MASTERCOLOR PAR30°L. Este foco da una intensidad luminosa de 2400 lúmenes, con una potencia de 35 W. Tiene un ángulo máximo de dispersión de 30°. En este tipo de lámparas, la temperatura del color permanece estable a lo largo de toda su vida, con un valor de 3000°K y una variación máxima de un  $\pm 5\%$ . Además, la vida de las lámparas superan las 5000 horas, volviéndolas ideales para la aplicación realizada. Por otro lado, estas lámparas de descargas pueden ser alimentadas con unas reactancias electrónicas de 90 Hz, permitiendo tener tiempos de integración en las cámaras de hasta 5 ms.

En cuanto a las cámaras, se han elegido de tipo matriciales y entrelazadas, por utilizar inspección visual paso a paso, lo que abarata los costes y permite usar múltiples cámaras. El modelo de cámara empleado es una WATEC902A. Respecto a la digitalizadora, es una tarjeta PCI con transferencia en DMA de las imágenes en tiempo real. Su nombre comercial es PULSAR-LC de MATROX, la cual lleva incorporado un multiplexor de cuatro canales.

### 7.2.3.2 Detección de los defectos

Por cada desplazamiento se adquieren cuatro imágenes, una por cada cámara. Éstas son captadas a motor parado, con la mínima apertura de iris, con el AGC de las cámaras activado y con un tiempo de integración de 20 ms. Los parámetros del digitalizador son contraste e intensidad. El valor de contraste es constante y corresponde con el máximo, mientras la intensidad se autoajusta con la primera imagen adquirida. Su razón viene motivada por las variaciones de gramaje de la pasta, lo que significa que el flujo luminoso refractado varía en función de los gramos por  $\text{mm}^2$  de pasta. A medida de un aumento de gramaje, la cantidad de luz transmitida disminuye. Por lo que se necesita variar el nivel de intensidad de la tarjeta digitalizadora en función del gramaje. Esta operación es automática y no precisa de intervención por parte del usuario.



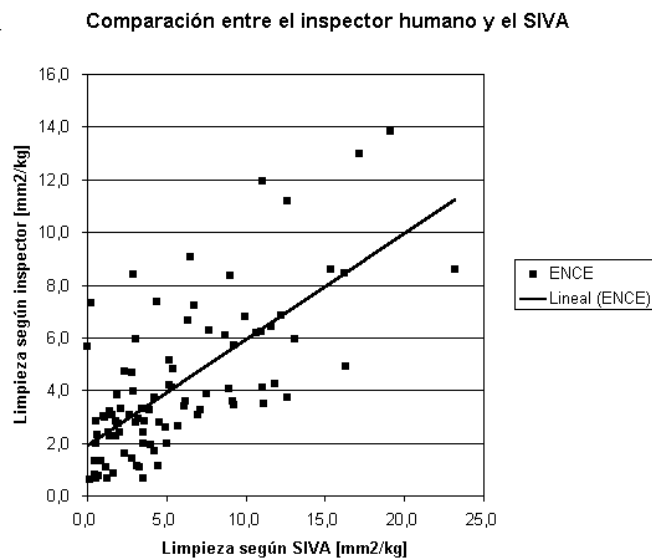
**Figura 7.14 Sistema de formación de imágenes**

Una vez que las cuatro imágenes son almacenadas, se ordena al planificador de trayectorias que se mueva a la siguiente posición. Simultáneamente, el algoritmo de detección de defectos locales es pasado sobre las cuatro imágenes adquiridas, cuyo proceder fue explicado en el punto 4.6. Una vez detectada una impureza, se pasa a medir su área y asignarle una etiqueta en función de lo indicado en la tabla 7.3. El área

defectuosa es sumada a otras áreas ya detectadas, y al finalizar la última posición de inspección se calcula la limpieza en pasta.

#### 7.2.4 Resultados

La máquina fue entregada a ENCE el día 24 de abril de 1998. En los momentos de escribir estas páginas la citada empresa está calibrando los resultados del SIVA, procediendo a comparar la limpieza en pasta del inspector humano con los dados por la máquina. Los resultados preliminares dados por ENCE son mostrados en la figura 7.15



**Figura 7.15 Resultados preliminares del SIVA**

El índice de correlación de los datos con el modelo lineal da un valor de R de 0.7. Las causas de las discrepancias entre el inspector y la máquina vienen dadas por las siguientes motivaciones. En primer lugar, la superficie de inspección utilizada por el operario y la máquina son distintas. En segundo lugar, el contraste entre la máquina y el inspector está basada en 186 pliegos, de las que la máquina detectó 673 defectos y el inspector 649, pero la discrepancia viene dada por la catalogación de los defectos. Mientras el SIVA clasificó 38 tipos A y 132 tipo B, el inspector sólo encontró 6 A y 67 B. Esta discrepancia viene dada por el efecto lupa, que el inspector elimina raspando la pasta de papel, acción que no realiza la máquina.

De otro lado, se ha constatado la muy buena precisión de las medidas por parte de la máquina. Mientras el inspector humano utiliza una plantilla para determinar el tamaño del defecto y además redondea, la precisión de la máquina en sus medidas es una de sus mejores virtudes.

También se ha observado que el bajo tiempo dedicado para cada pliego, 42 s., cumple con las exigencias de la fábrica. No obstante, el algoritmo de inspección sólo necesita 11.7 s., por lo que se puede plantear mejorar la mecánica de desplazamiento.

### 7.3 Conclusiones

---

Se han presentado dos SIVA industriales, uno dedicado a la inspección del aluminio colado y otro a la pasta de papel. Ambos han servido como marco de referencia para el trabajo experimental realizado en el transcurso de esta tesis. Se observa que la inspección visual de superficies planas y homogéneas, simple para un inspector humano, resulta compleja de automatizar. La riqueza de matices que efectúa el operario en un proceso de inspección visual, hace que los SIVA sean específicos de tarea, problemáticos y con limitaciones. Así por ejemplo, el SIVA implementado para la pasta de papel, no es capaz de detectar la mayoría de los *shives*, pues debido a su tonalidad anaranjada, queda diluida la información de luminancia respecto al fondo. Esta anécdota muestra como aun en el diseño específico las limitaciones se hacen evidentes. De todo ello se puede pronosticar que es un campo que hoy en día tiene mucha efervescencia ingenieril, pero no cabe duda que en el futuro lo seguirá teniendo, habida cuenta de la demanda creciente de estos sistemas efectuada por la industria actual.

# 8

## Conclusiones

---

Al inicio de esta tesis se ha abordado la problemática de la Inspección industrial, del que se evidenció una necesidad creciente de insertar las operaciones de inspección dentro del proceso productivo. De las muchas técnicas empleadas, la inspección visual automatizada es una rama fundamental para esta nueva filosofía, sobre todo en las industrias de materias primas o en sectores que requieren el 100% de la inspección. No obstante, las dificultades de esta tecnología hacen lenta su evolución, convirtiéndose en tema de estudio para muchos investigadores.

De partida existen tres hitos importantes en los SIVA: la formación de imágenes, la detección de los defectos y la clasificación de éstos. En formación de imágenes hay que abordar tanto el tipo de iluminación que sea capaz de aumentar todo lo posible el realce de la escena, así como la selección de los sensores a emplear. Respecto a la detección de los defectos, se trata de analizar las imágenes recibidas con el propósito de separar la componente de defecto respecto al fondo. En esta fase habrá de considerar tanto el procesamiento de las imágenes como su segmentación. Una vez fijada la posición de los defectos, éstos son pasados para su catalogación en etiquetas. Se puede decir que estas tres problemáticas han servido de línea argumental en el desarrollo de esta tesis.

El éxito de un SIVA empieza con la elección oportuna del sistema de formación de imágenes, el cual debe determinar el tipo de iluminación, la localización de las fuentes luminosas y las cámaras, y las tecnologías de adquisición a emplear. Esta tarea se inicia con un estudio sobre los elementos que definen la calidad de imagen, del que se destaca

que dependiendo del nivel de exactitud de la métrica habrá de considerar más elementos a modelar. Para el caso de los SIVA tratados, sólo ha sido necesario modelar las superficies a inspeccionar y las fuentes luminosas. Por lo que se pasa al estudio de los modelos de reflexión en superficies planas y de fuentes luminosas. Este desarrollo permite presentar una metodología basada en la modelización de la escena SIVA, utilizando el comportamiento de reflexión de la luz en superficies planas, así como de las fuentes luminosas. Con el modelo obtenido se puede localizar la óptima posición del foco y la cámara mediante la simulación de éstos en diferentes puntos del espacio. En este modelo, la cámara ha sido reducida a un punto en el espacio, sin considerar la información luminosa en cada pixel. Esta metodología es aplicada tanto al SIVA dedicado a la inspección del aluminio como el diseñado para la pasta de papel. Para acabar con este apartado, se presenta un árbol dicotómico que sirva de guía en la elección del tipo de tecnología CCD a emplear, dependiendo de las condiciones de la inspección visual.

Luego se pasa a presentar un esquema metodológico para la detección de defectos locales en superficies planas y homogéneas. El sistema de detección de defectos se basa en tres etapas: realzado, segmentación y post procesado. Respecto al realzado, se han estudiado filtros lineales discretos, proponiéndose un procedimiento novedoso para el diseño de las máscaras. Esta técnica se basa en el uso de la correlación lineal con variables cualitativas. Además también se han explorado técnicas de realce soportadas en procesamiento morfológico. En cuanto a la etapa de segmentación, fue abordada desde las funciones de densidad en niveles de grises del defecto y del fondo, introduciéndose el concepto de píxeles de alto y medio contrastes. Convirtiendo el problema de segmentación, en la localización óptima del umbral mediante una función de coste, donde se tiene en cuenta los dos errores típicos, defectos sin detectar y falsas alarmas. Las técnicas de post procesado han sido aplicadas con una doble intencionalidad, eliminación de falsas alarmas y reconstrucción de defectos a partir de los píxeles de alto contraste. A continuación, se ha pasado a definir un conjunto de medidas con el objeto de calibrar cuál es el mejor método de detección de defectos. Estas medidas se basan en las funciones de distribución en niveles de grises del fondo y de los defectos. Y por último, se ha implementado esta metodología para la detección de faltas locales en la pasta de papel, donde se han desarrollado experimentalmente las técnicas propuestas, ofreciendo los resultados del diseño para cada una de las etapas y cómo éstas han sido evaluadas.

Seguidamente, se presenta una nueva metodología de *clustering* paramétrico que empieza en el capítulo 5 y finaliza en el capítulo 6. Su fundamento está en los mapas auto organizados, en la parametrización del espacio mediante funciones normales y en las transformaciones Box Cox. Si bien los mapas de Kohonen permiten conocer la estructura inherente de los patrones, sin embargo, la formación de *cluster* no es inmediata a partir de la información otorgada por dichas neuronas, más bien es el principio. *Ults et al* proponen las U-Matriz como elemento de apoyo en la formación los *clusters*. La experiencia ha mostrado que si bien es una buena herramienta, en los casos estudiados no deciden de forma evidente las fronteras entre los grupos. En esta coyuntura, se plantea reforzar la decisión de agrupamiento mediante la búsqueda de subespacios normales.

Una vez extraídos los grupos inherentes de los datos se pasa a su parametrización. Para ello se ha utilizado las transformaciones normalizantes de Box Cox, las cuales

permiten obtener los subespacios normales de los clusters, tal que dicha transformación sea común con otros grupos cercanos, motivando una búsqueda que maximice la distancia entre grupos disjuntos y a la vez cercanos. Con tal propósito, en el siguiente capítulo se expone la teoría de clasificadores paramétricos y sus medidas, pudiendo de esta forma acabar la técnica de *clustering* parametrizado, propuesta original de esta tesis.

Se ha presentado el desarrollo de un nuevo modelo de parametrización, selección de las características y clasificación, en el que se considera tanto el número de muestras así como el error de clasificación de Bayes, y en el que se favorece la inserción de conocimiento a priori. El modelo se apoya sobre un análisis exploratorio de los datos, el cual fue recogido en el capítulo 5.

El nuevo método de parametrización se basa en la modelización del espacio de dos *clusters* enfrentados entre sí con etiquetas distintas. La región definida por ambos grupos es transformada a un subespacio, con las características de normalidad para cada grupo y el menor error de Bayes posible, atendiendo al número de muestras utilizadas para la estimación. Para ello, se busca la transformación Box Cox óptima marginal, de la que se aprovecha la utilización del intervalo de confianza para la característica transformada en los dos clusters, localizando el  $\lambda$  óptimo común. A ello le acompaña la distancia de Bhattacharyya, que determina un límite superior del error de Bayes. Esta información será utilizada para determinar el subespacio común más discriminante. Pero no sólo se utiliza la distancia, sino que además se calcula el sesgo y la varianza de la medida, con el objeto de conocer la validez de la métrica considerando el número de muestras utilizado.

Una vez que han sido parametrizados los grupos, se pasa al diseño de los clasificadores tanto lineales como cuadráticos, de los que también se ha trabajado en la localización de su error y de su sesgo. Se han obtenido expresiones analíticas tanto de los parámetros del clasificador como del error y del sesgo, todo ello para grupos que tienen distribuciones normales.

A tenor del trabajo realizado se plantea la modificación del algoritmo no paramétrico LVQ. Un estudio sobre este método cognitivo concluye que los *codebooks* tienden a situarse en la frontera de Bayes, mediante uso de hiperplanos, los cuales se presentan como clasificadores lineales. Si en vez de utilizar la distancia euclídea se utiliza la de Mahalanobis, es posible el paso de clasificadores lineales a cuadráticos. Esta modificación ha sido estudiada y se han comparado los resultados.

Con el objeto de verificar el análisis propuesto, se ha trabajado experimentalmente en la clasificación de defectos locales en el aluminio colado. Este problema ha servido como bancada de trabajo para el diseño de los clasificadores, tanto de técnicas tradicionales como las propuestas aquí recogidas. Las conclusiones obtenidas es que el método propuesto ayuda a introducir conocimiento a priori, haciendo de los clasificadores más exactos y generalistas, que aquellos basados tanto en reglas como en aprendizaje con ejemplos. La explicación viene dada por el hecho de tener expresiones analíticas que muestran con objetividad las características de cada subespacio en función del error y del número de muestras del universo. Obviamente este proceder no puede ser dado por los métodos tradicionales. Aunque los métodos de testeo como *leave-one-out* o *holdout* son

límites superiores de error, éstos no opinan sobre el sesgo del error, esto es, no consideran el número de muestras, y tampoco buscan por si mismos la selección de las características.

Para acabar, se han presentado dos SIVA industriales, uno dedicado a la inspección del aluminio colado y otro a la pasta de papel. Ambos han servido como marco de referencia para el trabajo experimental realizado en el transcurso de esta tesis. Se observa que la inspección visual de superficies planas y homogéneas, simples para un inspector humano, resultan complejas de automatizar. La riqueza de matices y las actividades inteligentes que efectúa el operario en un proceso de inspección visual hace que los SIVA sean específicos de tarea, problemáticos y con limitaciones. De todo ello se puede pronosticar que es un campo que hoy en día tiene mucha efervescencia ingenieril, pero no cabe duda que en el futuro lo seguirá teniendo, habida cuenta de la demanda creciente efectuada por la industrial actual.

## 8.1 Aportaciones de la tesis

---

A modo de resumen las aportaciones realizadas podrían ser expuestas atendiendo a los tres hitos ya mencionados. En la formación de imágenes se ha presentado un diseño del sistema de iluminación basado en las propiedades de reflexión de la luz sobre superficies planas y en los modelos de las fuentes luminosas. Primero se estudia si existe alguna zona del espectro luminoso que pueda incrementar el realce entre defecto y fondo. En segundo lugar, se pasa a ver qué modelo de superficie rugosa puede ser empleado, definiendo el tipo de modelo de reflexión que puede aplicarse. En tercer lugar, se estudia el prototipo de fuentes luminosas, centrándose en diseño de sistemas de iluminación uniforme. Una vez modelizado el problema, se pasa a su simulación con el propósito de localizar la óptima disposición geométrica de la superficie, los focos luminosos y la cámara. Si bien el método presentado no es una aportación, pues ya ha sido propuesto por otros autores, existen algunas contribuciones singulares, como la modelización de las fuentes mediante funciones de ponderación y el uso de la simulación para la determinación geométrica de las fuentes luminosas capaces de dar una iluminación uniforme sobre el escenario SIVA.

En cuanto a la detección de los defectos, dos aportaciones originales se han hecho. Respecto a la primera, se ha propuesto un método de diseño de las máscaras de convolución lineal, basándose esta técnica en regresión lineal con variable cualitativa. Y en segundo lugar, se ha presentado un método de calibración de las técnicas empleadas para la detección de los defectos. Estas medidas se fundamentan en la función de distribución del fondo y de los píxeles de alto contraste.

Sobre la extracción de las características también se ha trabajado, proponiendo la conversión de los objetos etiquetados en primitivas de gramáticas libres. Este proceder tiene como ventaja la posibilidad de diseñar tanto clasificadores basados en reglas como en vectores de características. Del que también se aporta cómo han sido transformadas las primitivas en partes del vector de características.

Otra de las aportaciones de esta tesis, es la técnica presentada de *clustering* paramétrico, basada en los mapas auto organizados, en las U-Matriz, en la descripción



textual de los patrones y en las transformaciones normalizantes Box Cox. Además, esta nueva técnica también realiza la selección de las características.

Una de las propiedades de los diseños de clasificadores para SIVA, es el bajo número de muestras de que se parte para cada tipo de defecto. Por lo que se han estudiado el cálculo del sesgo para clasificadores paramétricos tanto cuadráticos como lineales. Presentándose de forma novedosa el cálculo del sesgo para clasificadores lineales y cuadráticos de dos grupos enfrentados y en el espacio unidimensional. Además se ha iniciado el desarrollo de algoritmos LVQ con métrica de Mahalanobis, en la motivación de utilizar cuádricas en vez de hiperplanos de separación entre los clusters.

Todo ello ha sido implementado y comprobado en los dos SIVA industriales realizados.

## 8.2 Futuros trabajos

---

Como posibles líneas de trabajo a continuar podrían citarse las siguientes:

En formación de imágenes habría de seguir trabajando en incorporar más elementos al modelaje de la escena SIVA. Empezando por los sensores, si bien se ha iniciado un breve estudio sobre los modelos de las cámaras CCD, hay que continuar en la línea de integrar las ecuaciones de comportamiento de las superficies, focos y cámaras, con el objetivo de poder predecir la información luminosa en cada uno de los pixel del sensor.

Respecto a la detección de los defectos, se debería continuar la línea de diseño de los filtros, primero en cuanto a la determinación de las mascarar lineales y empezar también con la aplicación de filtros recursivos para el realce de los defectos. En esta línea ya se puede encontrar algunas referencias bibliográficas.

Habría de continuar en el estudio y generalización del cálculo del sesgo para clasificadores lineales y cuadráticos.

De otro lado, parece que la línea natural empleada en el diseño de los clasificadores paramétricos se debería intentar para los clasificadores no paramétricos, sobre todo en algoritmos LVQ, investigando en la capacidad de determinar el error y el sesgo teniendo en cuenta el número de muestras. Además de seguir estudiando los comportamiento de LVQ en métrica de Mahalanobis.

En cuanto a las aplicaciones SIVA implementadas, los meses venideros seguirán en el esfuerzo de mejorar el SIVA dedicado a la pasta de papel, sobre todo en tres direcciones principalmente: un primer camino en la búsqueda de la región espectral de la luz capaz de aumentar el realce de tipo *shive*, ya sea por la interposición de un filtro de transmitancia

entre la escena y el sensor, ya sea con el cambio de la fuente luminosa. Otra de las direcciones que pueden ser muy fructífera es el cambio de tecnología de adquisición, conducentes a introducir cámaras TDI para la determinación de la limpieza en pasta en la misma línea de producción. Y por último, mejorar los resultados de detección mediante el diseño de nuevos filtros para el realce de los defecto, objetivo ligado con las anteriores pretensiones.

## Bibliografía

---

- [Abbas93] Abbaszadeh, S., *The Automated Inspection Of Garments Using Machine Vision*, tesis doctoral de la Universidad de Montfort, 1993.
- [Aero93] Aeoryne Products, *WI-3000:Automatic surface inspection system*, catálogo comercial, 1930 Zaventem, Belgium, 1993
- [Amore90] Amorese, P., Bloomfield, J., *A slew of Standards for Camera Systems*, Datacube World Review, 1990.
- [ANSI78] American National Standards Institute, *Surface Texture*, ANSI / AMSE B46.1-1978, ANSI, New York, 1978
- [Andre71] Andrews, D.F., Gnanadesikan, R., Warner, J.L., *Transformation of multivariate data*, Biometrics, 27, pp. 825-840, 1971.
- [Atkin89] Atkinson, A.C., Lawrance, A.J., *A Comparison of Asymptotically Equivalent Test Statistics for Regression Transformation*, Biometrika, 76, 223 –229, 1989.
- [Avi-I96] Avi-Itzhak, H., Diep, T., *Arbitrarily Tight Upper and Lower Bounds on the Bayesian Probability of Error*, PAMI, V°18, N 1, January, 1996.
- [Awcoc95] Awcock, G.J., Thomas, R., *Applied Image Processing*, Macmillan, 1995

- [Balst92] Baltsavias, E.P., Beyer, H.A., Fritsch, D., Lenz, R.K., *Fundamentals of Real-Time Photogrammetry*. Tutorial notes for XVII<sup>th</sup> ISPRS Congress, Washington, DC, 1992
- [Bank90] Banks, S, *Signal Processing Image and Pattern Recognition*, McGraw Hill, 1990.
- [Barri69] Barrie, G., *Sampling Inspection and Quality Control*, Methuen and Company, Ltd., London, 1969.
- [Batch92] Batchelor, B.G., Braggins, D.W., *Commercial vision systems*, Computer Vision: Theory and Industrial Applications, Springer-Verlag, New York, pp 405-452, 1992.
- [Beckm63] Beckmann, P., Spizzichino, A. *The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Sources*, Pergamon, London, 1963.
- [Beyer93] Beyer, H.A., *Performance Analysis of CCD-Cameras for industrial inspection*, SPIE, Vº 1989 Computer Vision for Industry, 1993.
- [Beyer93a] Beyer, H., A., *Determination of Radiometric and Geometric Characteristics of Frame Grabbers*, SPIE, Vº 2067, Videometrics II, 1993
- [Bezde92] Bezdek, J.C., Pal, S.K. *Fuzzy models for pattern recognition. Methods that search for structures a data*, IEEE, Inc., New York, 1992.
- [Bhatt43] Bhattacharyya, A., *On a measure of divergence between two statistical populations defined by their probability distributions*, Bull. Calcutta Math. Soc., 35, pp 99-110, 1943.
- [Blouk87] Blouke, M.M., Janesick, J.R., Elliot, T., Hall, J.E., *Current Status of the 800 x 800 Charge-Couple-Device Image Sensor*. Optical Engineering, Vº 26 Nº 9, pp 864-874, September 1987.
- [Box64] Box, G.E.P., Cox, D.R., *An analysis of transformation*, Journal of the Royal Statistical Society 26, pp 211-252, 1964
- [Brads94] Bradshaw, M., *The automated inspection of web fabrics using machine vision*, tesis doctoral Universidad de Montfort, 1994.
- [Brite92] BRITE 4336, *System definition*, Technical Manager, BREU-CT91\_0393, Novara, May 1992.

- [Cancel86] Cancela, R., *Estudio de problemas notales en el análisis cluster*. Universidad de Santiago de Compostela, 1986
- [Carpen88] Carpenter G., Grosberg S. *The ART of Adaptive Pattern Recognition by a self-organizing neural network*, IEEE Computer, 77-88, March, 1988
- [Chamb95] Chamberlain, S.G., Kamasz, S.R. *A 26.3 Million Pixel CCD Image Sensor*, IEEE Proceedings of the International Conference on Electron Devices, pp 151-155, Washington DC, December 10, 1995.
- [Cases97] Cases, F., *Análisis textural de la pasta de papel*, Asignatura de doctorado: Técnicas avanzadas de procesamiento de imágenes, DISAM-UPM, 1997.
- [Chin82] Chin, R.T., Harlow, C.A., *Automated Visual Inspection: A survey*. IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligent, 6, pp 557-573, 1982
- [Chin88] Chin, R.T., *Automated Visual Inspection: 1981 to 1987*. Computer Vision Graphics Image Process, 41, pp 346-381, 1988
- [Chin92] Chin, R.T., *Automated visual inspection algorithms*. En Computer Vision: Theory and Industrial Applications, ed. Torras, pp 377-404, 1992.
- [Chern52] Chernoff, H., *A measure of asymptotic efficiency for test of a hypothesis based on the sum of observation*, Ann.Math.Stat., 23, pp 493-507, 1952.
- [Coole71] Cooley, W.W. Lohnes, P.R., *Multivariate Data Analysis*, New York, Wiley, 1971.
- [Cottr87] Cottrell, M., Fort, J.C. *Etude d'un algorithme d'auto-organisation*. Annales de l'Institut Henri Poincaré, 23, 1, pp1-20, 1987.
- [Cuadr91] Cuadras, C.M., *Métodos de Análisis multivariante*, pp 269-294. PPU, Barcelona 1991.
- [Dahle90] Dahle, O., Sommerfelt, A., *On line inspection of extruded profile geometry*, Proc. SME Vision 90 Conference, pp 61 – 69, 1990.
- [Devij82] Devijver, P.A., and Kittler, J. *Pattern Recognition. A Statistical Approach*. Prentice-Hall International, London, 1982.
- [Domin94] Dominguez, S., Campoy, P., Aracil, R., *A Neural Network Based Quality Control for Steel Strip Manufacturing*, Proceedings of the IFAC-AIRTCE 94.

- [Dough92] Dougherty, E.R., *An Introduction to Morphological Image Processing*, SPIE Tutorial Texts Series, 1992
- [Dough94] Dougherty, E.R., Astola, J., *An Introduction to Nonlinear Image Processing*, SPIE Tutorial Texts Series, 1994
- [EES92] European Electronic Systems, *CCD5020. High speed surface inspection with classification*, System Manual, BH235AG, England, 1992
- [Ence94] ENCE, *Control proceso final: limpieza en pastas*, Norma 404 ENCE, Enero 1994.
- [Erwin92] Erwin, E., Obermayer, K., Schulten, K. *Self-Organizing maps: Order, convergence properties and energy functions*. Biological Cybernetics, 67, pp 47-55, 1992.
- [Escud77] Escudero, L. *Reconocimiento de patrones*, Paraninfo, 1977
- [Feng93] Feng, O., *Computerized image quality inspection system*, Machine Vision Applications in Industrial Inspection, SPIE Vol. 1907, pp 133-138, 1993
- [Fernán94] Fernández, C., Platero, C., Campoy, P., Aracil, R., *Surface inspection of flat products by means of texture analysis. On-line implementation using neural networks*, European Symposium on Optics for Productivity in Manufacturing, Frankfurt, 1994.
- [Fernán97] Fernández, J.C., *Inspección de superficies mediante Visión Artificial. Integración en tiempo real en procesos productivos*, tesis doctoral de la UPM, 1997
- [Fernán97a] Fernández, J., Fernández, C., Aracil, R., *On line integral quality control of ceramic tiles by artificial vision*, Proc. International Conference on Quality Control by Artificial Vision QCAV'97, 1997
- [Freem89] Freeman, H. *Machine vision for inspection and measurement*. Academic Press 1989
- [Fu88] Fu, K. *Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence*. McGraw Hill, 1988
- [Fu82] Fu, K.S. *Syntactic pattern recognition with applications*, Prentice Hall, 1982.
- [Fukun89] Fukunaga, K., Hayes, R., *Effect of sample size in classifier design*, PAMI, Vº 11, Nº 8, pp 873-885, august 1989

- [Fukun90] Fukunaga, K., *Introduction to Statistical Pattern Recognition*, Academic Press, 1990
- [Gallar97] Gallardo, C., *Estudio para la detección de defectos en pasta de papel mediante técnicas de Visión Artificial*. Proyecto fin de Carrera de DISAM-UPM, 1997
- [Garcí97] García, C., *Clasificadores paramétricos lineales y cuadráticos, aplicados a la catalogación de defectos locales del aluminio colado*. Proyecto fin de Carrera de DISAM-UPM, 1997
- [Garcí98] García, L., *Estudio sobre distribuciones de campos luminosos sobre superficies planas*, Documento interno de DISAM, 1998.
- [Genne93] Gennert, M.A., Wittles, N, Leatherman, G.L., *Uniform Frontal Illumination of Planar Surfaces: Where to Place the Lamps*, Optical Eng., 32, pp 1261-1270, 1993
- [Genne94] Gennert, M.A., Wittles, N, Leatherman, G.L., *Uniform Frontal Illumination of Planar Surfaces: Criteria for Optimal Lighting Design*, SPIE vol. 2065, pp 62-69, 1994
- [Gile92] Giles, C.L. *Second-order recurrent neuronal networks for grammatical inference*. Proc. Int. Joint Conference on Neural Networks, 1992.
- [Glasb93] Glasbey, C.A., *An analysis of Histogram-Based Thresholding Algorithms*, CVGIP, Vol. 55, N° 66, pp 532-537, 1993.
- [Gonzá98] González, A. *Adquisición y modelado tridimensional en Visión artificial mediante técnicas de luz estructurada*, tesis doctoral de la UPM, 1998.
- [Guine91] Guinea, D., Ruiz, A., Barrios, L.J., *Multi-sensor integration: An automatic feature selection and state identification methodology for tool wear estimation*, Computer in Industry, V° 17, N 2&3, L. Monostori, pp. 121-130, Elsevier, Nov, 1991.
- [Hall65] Hall, D.J., Ball, G.B., *ISODATA: A novel method of data analysis and pattern classification*, Technical report, Stanford Research Institute, Menlo Park, CA, 1965.
- [Han93] Han, J.H., Yoon, D.M., Kang M.K., *Feature for automatic surface inspection*, SPIE V° 1907 Machine Vision Applications in Industrial Inspection, 1993.
- [Hect84] Hecht, Zajac, *Óptica*, Addison Wesley, 1984

- [Hertz91] Hertz, J., Krough, A., Palmer, R., *Introduction to the theory of Neural Computation*. Addison-Wesley, 1991.
- [Holst96] Holst, G.C., *CCD arrays, cameras and displays*, SPIE Press, 1996.
- [Hughe68] Hughes, G.F, *On the mean accuracy of statistical pattern recognizers*, Trans. IEEE Inform. Theory, IT-14, pp. 55-63, 1968.
- [Ikeuc94] Ikeuchi, K., *Surface Reflection Mechanism*, Handbook of Pattern Recognition and Image processing: Computer Vision, V° 2, Academic Press, pp 131-156, 1994
- [Intec93a] Intec, *System 3000: Automatic Inspection System for Continuous Web Products*, Catálogo comercial, North Billerica, MA 01862, 1993
- [Intec93b] Intec, *On-Line Pulp Inspection System*, Catálogo comercial, North Billerica, MA 01862, 1993
- [Jähne93] Jähne, B., *Digital Image Processing. Concepts, algorithms and applications*, Springer-Verlag, 1993.
- [Jähne97] Jähne, B., *Digital Image Processing: Concepts, Algorithms and Scientific Applications*, Springer, 1997
- [Jain89] Jain, A.K., *Fundamentals of Digital Image Processing*, Prentice Hall, 1989
- [Kanal92] Kanal, L., Raghavan, R., *Hybrid systems a key to intelligent pattern recognition*. Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks, pp IV 177-182, Baltimore, June 1992.
- [King85] King, K., Just, J., Osheroff, Berke, G., Spidaliere, P., Ngoc, T., *Robotic technology: An assessment and forecast*, Robotics and Flexible Manufacturing Technologies, Noyes, Park Ridge, NJ, 1985.
- [Kohon82] Kohonen, T., *Self-organized formation of topologically correct features maps*. Biological Cybernetics, 43, pp 59-69, 1982
- [Kohon82a] Kohonen, T. *Analysis of a simple self-organizing process*. Biological Cybernetics, 44, pp 135-140, 1982.
- [Kohon88] Kohonen, T. *The self Organizing Map*. Proceedings of the IEEE, V° 78, N° °, pp1464-1480, 1988



- [Kohon92] Kohonen, T., Kangas, J., Laaksonen, J. *LVQ\_PAK: A Program Package for the Correct Application of Learning Vector Quantization Algorithms*. Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks, pp I 725-730, Baltimore, June 1992, IEEE.
- [Kohon95] Kohonen, T. *Self-Organizing Maps*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1995
- [Kung93] Kung, S.K., *Digital neural networks*. Prentice Hall, 1993.
- [Lambe60] Lambert, J.H., *Photometria sive de mensura de gratibus luminis colorum et umbrarum*, Eberhard Klett, Augsburg, 1760
- [LeBea90] LeBeau, C.J., *Machine vision platform requirements for successful implementation and support in the semiconductor assembly manufacturing environment*, Proceeding of SPIE Machine Vision System Integration in Industry Conference, Boston, SPIE V° 1368, pp 228-231, 1990
- [Lee90] Lee, S.U., Chung, S.Y., Park, R.H., *A Comparative Performance Study of Several Global Thresholding Techniques for Segmentation*, Computer Vision, Graphics, and Image Processing 52, pp 177-190, 1990
- [Macai93] Macaire, L., Postaire, J.G., *Flaw detection on galvanized metallic strips in real time by adaptive thresholding*, Computer Vision for Industry, V° 189, pp 14-25, SPIE 1993.
- [Malsb73] von der Malsburg, Ch. *Self-organization of orientated sensitive cells in the striate cortex*. Kybernetik, N°14, pp 85-100, 1973.
- [Marav93] Maravall, D., *Reconocimiento de Formas y Visión artificial*, Rama, 1993.
- [Marsh90] Marshall, A.D., *Automatic inspection gross features of machined objects using three-dimensional depth data*, Proceedings of the SPIE Conference on Machine System Integration in Industry, Boston, 1990, pp 243 - 254.
- [Marti90] Martínez J.A., *Contribución al análisis y estimación en imágenes digitales mediante la teoría de la información*, tesis doctoral de la Universidad de Granada, 1990.
- [Martí95] Martín del Brio, B., *Procesamiento Neuronal con Mapas Autoorganizados: Arquitecturas Digitales*, pp 49-114, tesis doctoral de la Universidad de Zaragoza, 1995.
- [Mathe75] Matheron, G., *Random Set and Integral Geometry*, John Wiley, New York, 1975.

- [Matro97] Matrox, *User Guide*, Manual N° 10513-MN-0500, pp 135-158, 1997
- [McLac92] McLachlan, G.J., *Discriminant Analysis and Statistical Pattern Recognition*, New York, John Wiley, 1992.
- [Newma95] Newman, T.S., Jain, A.K., *A Survey of Automated Visual Inspection*, *Computer Vision and Image Understanding*, V° 61, March, pp 231-262, 1995.
- [Miett93] Miettinen, J., Härkönen, A., *Procedure for image acquisition design*, SPIE Vol.1989 Computer Vision for Industry, pp 70-80, 1993.
- [Mulie92] Mulier, V., Cherkaassky, V. : Proc. 12 ICPR, Int. Conf. On Pattern Recognition (IEEE Services Center, Piscataway, NJ 1994), p.II-224, 1994
- [Nayar91] Nayar, S.K., Ikeuchi, K., Kanade, T. *Surface reflection: Physical and geometrical perspectives*, PAMI –13 (7), 661-634, 1991.
- [Ninom92] Ninomiya, T., Yoshimura, K., Nomoto, M., *Automatic screen-printed circuit pattern inspection using connectivity preserving image reduction and connectivity comparison*, Proc. 11<sup>th</sup> ICPR, V° A, pp 53-56, 1992.
- [Norto82] Norton-Wayne, *The detection of defects in automated visual inspection*, British thesis, 1982.
- [Norton83] Norton-Wayne, L., Finkelstein L. *Signal Processing for automatic surface inspection of steel strip*, Trans Inst M C, V° 5, N° 3, 1983.
- [Ohta86] Ohta, K., Sakue, K., Tanura, H., *Pattern Recognition Of Fabric Surfaces*, Journal Of The Textile Machinery Of Japon, V°32, N°1, pp 7-10, 1986.
- [Oulu97] Oulu University, *Information Processing and Computer Engineering Laboratory*, Electrical Engineering Department, Oulu Univeaity, <http://www.ee.oulu.fi>, 1997.
- [Parsy97] Parsytec Co., <http://www.Parsytec.de>, 1997.
- [Parth87] Parthasarathy, S., Wolf, D., Hu, E., Hackwood, S., Beni, G., *A color vision system for film thickness determination*, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, Raleigh, NC, pp 515-519, 1987
- [Patri72] Patrick E.A. *Fundamentals of Pattern Recognition*, pp 411-418. Prentice Hall, 1972.

- [Peña87] Peña, D., *Estadística, modelos y métodos*, Alianza Editorial, 1987.
- [Phong75] Phong, B.T., *Illumination for computer generated pictures*, Commun. ACM 18 (6), pp 311-317, 1975.
- [Piironen90] Piironen, T., Silven, O., Pietikäinen, M., Laitinen, T. *Automated Visual Inspection of Rolled Metal Surface*, Machine Vision and Applications, Vº 3, pp 247-254, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [Poole89] Poole, H., *Fundamentals of Robotics Engineering*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1989.
- [Plate92] Platero, C., *Detección y clasificación de defectos en las planchas de aluminio mediante Visión artificial*, Proyecto fin de Carrera, DISAM-UPM, TFC 92/185, 1992.
- [Plate94] Platero, C., Fernández, C., Campoy, P., Aracil, R., *Surface analysis of cast aluminium by means of artificial vision and AI-based techniques*, Symposium on: Electronic Imaginig: Science & Technology, 1994
- [Plate95] Platero, C., Fernández, C., Campoy, Aracil, R., *Hybrid system : Aplicacion to defect clasification in cast aluminum*, International Conference on Quality Control by Artificial Vision, pp 48-58, 1995
- [Plate95a] Platero, C., Fernández, C. , Campoy, P., Aracil, R., *Surface analysis of cast aluminum by means of artificial vision and A.I. based techniques*, International conference on Quality Control by Artificial Vision, Le Creusot, France, 1995.
- [Plate97] Platero, C., Crespo, C., Garcia, J., Campoy, P., Aracil, R., *Feature space parametrization by means Self organizing maps and Box Cox transformations*, VII SNRFAI, Barcelona, 25 April, 1997.
- [Plate97a] Platero, C., *Inspección de etiquetas en productos farmacéuticos*, Documentación interna de FAIS-UPM.
- [Plate98] Platero, C., *Inspección visual automatizada de superficies homogéneas mediante Visión Artificial con aportaciones al Reconocimiento de Formas*, tesis doctoral de la UPM, 1998.
- [Pratt91] Pratt, W., K., *Digital Image Processing*, A Wiley-Interscience Publication, Second Edition, 1991.
- [Rao71] Rao, C.R. *Taxonomy in anthropology*. Mathematics in the Archeological and Historical Sciences, Edinburg University Press, 1971

- [Raube95] Rauber, T.W., Barata, M.M., Steiger-Garcia, A.S., *A toolbox for analysis and visualization of sensor data in supervision*. Universidade Nova de Lisboa, 1995.
- [RealA96] Real Academia Española, *Diccionario de la Lengua española*, Espasa Calpe, 1996.
- [Ritte88] Ritter H., Schulten K., *Convergence properties of Kohonen's topology conserving maps: Fluctuations, stability, and dimension selection*, Biological Cybernetics, 60, 59-71, 1988.
- [Reino96] Reinoso, O., *Análisis y generalización de algoritmos de Visión Artificial con precisión subpixel*, tesis Doctoral UPM, 1996
- [Rober93] Rober, J.W., Rose, S.D., Jullien, G., *A PC-based Real Time Defect Imaging System for High Speed Web Inspection*, SPIE, Vº 1907 Machine Vision Applications in Industrial Inspection, pp164-176, 1993
- [Rolan87] Roland, T.C. *Automated visual inspection: 1981 to 1987*. CVGIP 41, pp 346-381, 1987
- [Ruíz92] Ruíz, R., Barro, S., Presedo, J., *Clasificación borrosa basada en conocimiento. Estudios de lógica borrosa y sus aplicaciones*. Universidad de Santiago de Compostela, 1992.
- [Sánchez98] Sánchez, F., *Técnicas fotogramétricas para el control dimensional*, Documento registrado DISAM-UPM, R98-017v1.0, 1998.
- [Sears81] Sears, F.S., Zemansky, M.W., *Física General*, Aguilar, 1981, pp 837-842
- [Sebas90] Sebastian, J.M., Campoy, P., Reinoso, L. Jiménez, L.M., *Introducción a la Visión Artificial*, Documento interno de DISAM-UPM.
- [Sebas95] Sebastian, J.M., *Parallel processing and scheduling techniques applied to the quality control of bill sheets*. Proc. IAPR, pp 399 – 403, 1995
- [Serran93] Serrano, C., Martín del Brio, B. Gallizo, J.L. *Mapas Neuronales Autoorganizados: una nueva herramienta de análisis contable*. Reunión de la Asociación Española de Contabilidad y Administración de Empresas, AECA '93, Vitoria, sept. 1993
- [Serran95] Serrano, J., *Procesado morfológico de imágenes. Aplicación para control industrial*, Eurofach Electrónica, marzo 1995.

- [Sikka92] Sikka,D.,*Two dimensional curve shape primitives for detecting line defects in silicon wafers*, Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks, pp III 591-596, Baltimore, June 1992, IEEE.
- [SOM92] SOM PACK. *The Self-organizing Map Program Package*, University of Technology, Helsinki (Finland) Nov, 1992.
- [Sahoo88] Sahoo, P.K., Soltani, S., Wong, K.,C., *A Survey of Thresholding Techniques*, GVCIP, N° 41, pp 233-260, 1988.
- [Serra82] Serra, J., *Image analysis and mathematical morphology*, Academic Press, London, 1982.
- [Silva92] Silva, J., Pais, C.P., Freitas, J.C., Carvalho, F.D., Rodrigues, F.C., *Detection And Automatic Classification Of Defect in Ceramic Products*, SPIE V° 1713, International Conference On Manufacturing Automation, pp 22-28, 1992.
- [Smith93] Smith, B., *Making war on defects : Six-sigma design*, IEEE Spectrum 30 (9), pp 43-47, September, 1993
- [Spieg88] Spiegel, M.R. *Statistical* . McGraw Hill, New York, 1988.
- [Takat88] Takatoo, M., Takagi, Y., Mori, T., *Automated Fabric Inspection System Using Image Processing Rechnique*, SPIE V° 1004, Automated Inspection and High Speed Vision Architecture's II, pp 151-158, 1988.
- [Torre67] Torrance. K.,Sparrow, E., *Theory off-specular reflection from roughness surfaces*, J.Opt.Soc.Amer. N° 57,pp 1105-1114, 1967
- [Ultsc90] Ultsch, A., Siemon, H.P. *Kohonen's self-organizing feature maps for exploratory data analysis*. Proc Int. Neural Networks Conf. INNC 90, Paris, Ed. Kluwer, pp 305-208, 1990.
- [Vando90] Vandommelen, C.H., *Fundamentals of Camera Selection for Machine Vision*, Applied Intelligent Systems, Inc., 1990.
- [VanGo91] Van Gool, L. Wambacq, P., Oosterlinck, *Intelligent robotic visions systems*, Intelligent Robotic Systems, pp 457 - 507, Dekker, New York, 1991
- [Varfi92] Varfis, A., Versino, C., *Clustering of socio-economic data with Kohonen maps*, Neural Networks World, 2, 6, pp 813-833, 1992.

- [Velil92] Velilla, S., *A note on the multivariate Box-Cox transformation to normality*, Working Paper 92-08, Universidad Carlos III de Madrid, Febrero de 1992.
- [Velil94] Velilla, S., Barrio, J.A., *A discriminant rule under transformation*, Technometrics, Vº 36, Nº 4, november 1994.
- [Venon91] Venon, D., *An overview of techniques for shape description*, Machine Vision, Prentice Hall, 1991.
- [Vitri92] Vitriá i Marca, J. *Estudi sobre l'automatizació de l'anàlisi visual de circuits integrats mitjançant morfologia matemàtica*, tesis doctoral de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1992.
- [Widro62] Widrow, B. *Self-Organizing Systems*, Spartan Books, Washington, D.C., 435, 1962.
- [Winch96] Winchell, W., *Inspection and Measurement in Manufacturing*, Society of Manufacturing Engineers, 1996.
- [Wrigh88] Wright, P.K., Bourne, *Manufacturing Intelligence*, Addison-Wesley, New York, 1988.
- [Xie91] Xie, X., Beni, G., *A validity measure for fuzzy clustering*, IEEE PAMI, col. 13, pp 841-847, 1991
- [Zador87] Zador, P : IEEE Trans. Inform. Theory IT-28, 139, 1987
- [Zeuch88] Zeuch, N., *Applying Machine Vision*, Wiley, New York, 1988